Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

2. Lösungsblatt

für die Woche 28.10. - 03.11.2019

Abbildungen

Hinweis: Hausaufgaben, die zur Abgabe bestimmt sind, sind mit einem $\boxed{\textbf{A}}$ **gekennzeichnet. Weitere Hausaufgaben dienen Ihnen zum selbstständigen Nacharbeiten des Stoffes.**

Ü8 (a) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen f darauf, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind, und bestimmen Sie die Umkehrabbildung f^{-1}, falls sie existiert:

(3) die Abbildung $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$, die jeder nichtleeren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ das kleinste Element in A zuordnet.

(b) Es seien A, B, C beliebige, nichtleere Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ zwei Abbildungen. Beweisen Sie:

- Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.
- Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist auch g surjektiv.

Lösung:

(a) Die Umkehrabbildung existiert nur für injektive Abbildungen.

(3) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $f(A)$ ist das kleinste Element in A.

$\boxed{\text{injektiv?}}$ nein. Gegenbeispiel $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\} \;\Rightarrow\; f(A) = f(B) = 1$.

$\boxed{\text{surjektiv?}}$ ja, da für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ z.B. $A_n := \{n\}$ auf n abgebildet wird.

$\boxed{\text{bijektiv?}}$ nein, da f nicht injektiv.

(b) Zur Komposition von Abbildungen:

- Es seien $x, y \in A$ beliebig mit $f(x) = f(y)$. Dann folgt $g(f(x)) = g(f(y))$, also $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Da $g \circ f$ injektiv, folgt $x = y$. Also ist f injektiv. $\square$
- Es sei $c \in C$ beliebig. Da $g \circ f$ surjektiv ist, existiert $a \in A$, so dass $(g \circ f)(a) = c$, damit ist für $b := f(a) \in B$ auch $g(b) = c$, also g surjektiv. $\square$

Ü9 (b) Beschreiben Sie die Bewegungen der Ebene, die ein gleichseitiges Dreieck auf sich abbilden, durch Permutationen der Eckpunkte in Zyklenschreibweise.

Lösung:

(b) Seien die Eckpunkte mit den Zahlen 1,2,3 bezeichnet. Die Permutationen sind:

$\sigma_1 = (1\,2),\quad \sigma_2 = (1\,3)\quad \sigma_3 = (2\,3),\quad d_0 = \mathrm{id},\quad d_1 = (1\,2\,3),\quad d_2 = (1\,3\,2).$

Es sind drei Spiegelungen und drei Drehungen (dazu zählt die Identität d_0).

H11 (a) Es seien A, B, C nichtleere Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ zwei beliebige Abbildungen. Untersuchen Sie, ob die Komposition eine kommutative Operation ist, d.h. ob gilt $g \circ f = f \circ g$. (Beweis oder Gegenbeispiel!)

(b) Für Mengen A, B mit $|A| > 1, B \neq \emptyset$ wird die Abbildung

$$F : A \times B^A \to B \quad \text{mit } F(a, f) := f(a)$$

betrachtet. Welche Mächtigkeit hat der Definitionsbereich von F (bzgl. der Mächtigkeit von A und B)? Ist F injektiv? Ist F surjektiv?

Lösung:

(a) Es ist keine kommutative Operation. Gegenbeispiel:
$A = B = C = \{1, 2, 3\}$ und Permutationen $f = (1\ 2)$, $g = (1\ 3)$.
Es ist $g \circ f = (1\ 2\ 3)$ und $f \circ g = (1\ 3\ 2)$.

(b) $F : A \times B^A \to B, \quad F(a, f) = f(a)$.

$\left|A \times B^A\right| = |A| \cdot |B|^{|A|}$.

Da $|A| > 1, |B| > 0$ ist, gibt es Elemente $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ und $b \in B$.

Es sei $f : A \to B$ durch $f(x) = b$ für alle $x \in A$ definiert. Dann gilt:
$F(a_1, f) = f(a_1) = b = f(a_2) = F(a_2, f)$, aber $(a_1, f) \neq (a_2, f)$
$\Rightarrow$ F surjektiv, aber nicht injektiv.

H12 Gegeben sind die Mengen $A := \{a, b\}$ und $B := \{c, d, e, f\}$. Bestimmen Sie:

(a) die Anzahl aller injektiven Abbildungen in B^A und in A^B.

(b) die Anzahl aller surjektiven Abbildungen in B^A und in A^B.

Geben Sie jeweils, wenn möglich, ein Beispiel einer solchen Abbildung an. **Lösung:**
Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b\}$ und $B = \{c, d, e, f\}$.

(a) Anzahl aller injektiven Abbildungen in B^A: $4 \cdot 3 = 12$.
Anzahl aller injektiven Abbildungen in A^B: keine, da $|B| > |A|$.

(b) Anzahl surjektiver Abbildungen in B^A: keine, da $|B| > |A|$.
Anzahl surjektiver Abbildungen in A^B:
1.Fall: genau ein Elem. von B wird auf a abgebildet: 4 mgl. Abb.
2.Fall: genau zwei Elem. von B werden auf a abgebildet: $\binom{4}{2} = 6$ mgl. Abb.
3.Fall: genau drei Elem. von B werden auf a abgebildet: 4 mgl. Abb. (s. Fall 1)
Also insgesamt 14 Abbildungen.