

3. Lösungsblatt

für die Woche 04.11. - 10.11.2019

Aussagenlogik, Boolesche Funktionen

Ü15 (c) Durch untenstehende Wertetabelle ist eine boolesche Funktion $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ gegeben.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Bestimmen Sie die Darstellung der Funktion in disjunktiver Normalform (DNF).

Lösung:

(c) Man betrachtet nur die Zeilen, in denen sich der Wert 1 ergibt und bekommt:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) .$$

Für die Herleitung der KNF aus der Tabelle siehe z.B. Wikipedia.

H17 Es seien A und B aussagenlogische Ausdrücke über derselben Variablenmenge. Ordnen Sie die folgenden Ausdrücke in einer solchen Reihenfolge an, dass jeder Ausdruck, die rechts von ihm folgenden impliziert.

(i) $\neg A \Leftrightarrow B$ (ii) $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ (iii) $\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$

(iv) $A \vee B$ (v) $\neg A \wedge B$.

Lösung:

Wir bezeichnen die Ausdrücke mit ihren Nummern.

A	B	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0

Es gilt also: (iii) \models (v) \models (i) \models (iv) \models (ii).

H18 (a) Gegeben ist die boolesche Funktionen $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ durch die Wertetabelle

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Bestimmen Sie eine Darstellung von $f(x_1, x_2, x_3)$ in DNF. Versuchen Sie auch, eine Darstellung in KNF zu finden.

- (b) Verwenden Sie die Methode der positiven 1-Resolution, um zu entscheiden, ob der aussagenlogische Ausdruck

$$(x \vee \neg z \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge z \wedge (\neg y \vee z \vee \neg x)$$

erfüllbar ist. Falls ja, so geben Sie eine erfüllende Belegung an. Falls nein, begründen Sie, warum der Ausdruck nicht erfüllbar ist.

Lösung:

- (a) DNF: $f(x_1, x_2, x_3) = (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$.
KNF: Man suche selbst (s. z.B. Wikipedia) und prüfe anhand der Wertetabelle.

- (b) $A := (x \vee \neg z \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge z \wedge (\neg y \vee z \vee \neg x)$

Es ist die Klausel z in A , also kann $\neg z$ in den anderen Klauseln gestrichen werden:

$$A \Leftrightarrow (x \vee \neg y) \wedge y \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge z \wedge (\neg y \vee z \vee \neg x).$$

Es ist die Klausel y enthalten, also kann $\neg y$ in den anderen Klauseln gestrichen werden:

$$A \Leftrightarrow x \wedge y \wedge \neg x \wedge z \wedge (z \vee \neg x).$$

Da die Klauseln x und $\neg x$ enthalten sind, ist der Ausdruck nicht erfüllbar.