Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

4. Lösungsblatt

für die Woche 11.11. - 17.11.2019

Natürliche Zahlen, Primzahlen, Induktion

Ü21 Beweisen Sie folgende Aussagen mit vollständiger Induktion:

(b) Für die in der Vorlesung rekursiv definierte Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}$ gilt die Eigenschaft der Distributivität:

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}: \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\ .$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, gibt es eine Primzahl, die n teilt.

Lösung:

(b) Vollständige Induktion über $n := c$.
Die Aussage A_n lautet: $a(b + n) = ab + an$ gilt für beliebige, feste $a, b \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Induktionsanfang}}$: A_0 gilt nach Definition der Addition und Multiplikation:

$$a(b + 0) = a \cdot b = a \cdot b + 0 = a \cdot b + a \cdot 0.$$

$\boxed{\text{Induktionsschritt:}}$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $\underbrace{A_n \text{ gilt}}_{IV}$, dann gilt auch A_{n+1}.

$\boxed{\text{Beweis:}}$ Es gelte A_n, zu zeigen ist: $\forall a, b \in \mathbb{N}: \ a(b + n^+) = ab + an^+$.

Es gilt nach Definition der Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned} a(b + n^+) &= a(b + n)^+ = a(b + n) + a \\ &\overset{IV}{=} ab + an + a = ab + an^+ = ab + an^+\ .\square \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ das Distributivgesetz gilt.

(c) Die Aussage A_n lautet: Es gibt eine Primzahl, die n teilt.

$\boxed{\text{Induktionsanfang}}$: A_2 gilt, denn 2 teilt 2.

$\boxed{\text{Induktionsschritt:}}$ Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt: Wenn $\underbrace{A_n \text{ gilt}}_{IV}$, dann gilt auch A_{n+1}.

$\boxed{\text{Beweis:}}$ Es gelte A_k für alle $k \leq n$, zu zeigen ist, dass es eine Primzahl gibt, die $n + 1$ teilt.

1. Fall: $n + 1$ ist Primzahl. Das ist trivial, da $n + 1$ sich selbst teilt.

2. Fall: $n + 1$ ist keine Primzahl. Dann gibt es $m, k \in \mathbb{N}, m > 1, k > 1$ mit $n + 1 = m \cdot k$. Folglich ist $k \leq n$ und nach IV gibt es eine Primzahl p, die k teilt. Dann teilt p aber auch $n + 1$.

H23 (a) Es bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Diagonalen eines ebenen, konvexen n-Ecks. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ für $n \geq 3$ gilt. Finden Sie auch einen Beweis ohne vollständige Induktion?

(b) Wir betrachten die Fibonacci-Zahlen $F_n, n = 0, 1, \ldots$, die durch $f_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ und $F_0 = F_1 = 1$ rekursiv definiert sind. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass je zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen teilerfremd sind.

Lösung:

(a) Die gewünschte Aussage A_n lautet $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.

$\boxed{\text{Induktionsanfang}}$ A_3 gilt, da ein Dreieck keine Diagonalen besitzt; also $d(3) = 0 = \frac{3 \cdot 0}{2}$.

$\boxed{\text{Induktionsschritt:}}$ Für alle $n \geq 3$ gilt: Wenn $\underbrace{A_n \text{ gilt}}_{IV}$, dann gilt auch A_{n+1}.

$\boxed{\text{Beweis:}}$ Es gelte A_n, zu zeigen ist, dass ein konvexes $(n+1)$-Eck genau $d(n+1) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ Diagonalen besitzt.
Sei dazu Q_{n+1} ein ebenes, konvexes $n+1$-Eck. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschriften wir die Eckpunkte von Q_{n+1} im Uhrzeigersinn mit $1, 2, \ldots, n+1$. Sei bezeichne a nun die Anzahl der Diagonalen von Q_{n+1}, die $n+1$ als Endpunkt haben, und es bezeichne b die Anzahl der Diagonalen von Q_{n+1}, die $n+1$ nicht als Endpunkt haben. Offenbar gilt $a = n-2$, denn es kommen nur die Diagonalen der Form $(i, n+1)$ für $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ in Betracht. (Die Strecken $(1, n+1)$ und $(n, n+1)$ sind Kanten von Q_{n+1}, keine Diagonalen!) Die Diagonalen, die $n+1$ nicht als Endpunkt haben, entsprechen (bis auf $(1, n)$) genau den Diagonalen eines ebenen, konvexen n-Ecks; also gilt $b = d(n) + 1$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} d(n+1) &= a + b \\ &= n - 2 + d(n) + 1 \\ &\overset{IV}{=} n - 2 + \frac{n(n-3)}{2} + 1 \\ &= \frac{2n - 2 + n(n-3)}{2} \\ &= \frac{n^2 - n - 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

(b) Die Aussage A_n lautet: F_n und F_{n+1} sind teilerfremd.

- IA: Es gilt A_0, denn $\mathrm{ggT}(F_0, F_1) = \mathrm{ggT}(1{,}1) = 1$.
- IS: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $\underbrace{A_n \text{ gilt}}_{IV}$, dann gilt auch A_{n+1}.

  Beweis: Sei t gemeinsamer Teiler von F_{n+1} und F_{n+2}, d. h. $t | F_{n+1}$ und $t | F_{n+2}$
  $\Longrightarrow \; t | (\underbrace{F_{n+2} - F_{n+1}}_{F_n}) \; \Longrightarrow \; t | F_n$.
  Mit $t | F_n$, $t | F_{n+1}$ und $\mathrm{ggT}(F_{n+1}, F_n) = 1$ folgt $t = 1$. Also $\mathrm{ggT}(F_{n+2}, F_{n+1}) = 1$.

H24 (a) Geben Sie für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ die Primfaktorzerlegung der Zahl $n = 42^m$ an. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von m eine Formel für die Anzahl Teiler von n.

(b) Finden Sie alle $n \in \mathbb{N}$, so dass die Zahlen $n+1$, $n+5$ und $n+15$ Primzahlen sind.

Lösung:

(a) $n = 2^m \cdot 3^m \cdot 7^m$. Die Anzahl der Teiler ist folglich $(m+1)^3$.

(b) Die Zahl n muss gerade sein. Weiterhin ist hier die Teilbarkeit durch 3 der springende Punkt. Lässt n bei Division durch 3 den Rest 0, d.h. $n = 3k, k \in \mathbb{N}$, dann ist $n + 15 = 3k + 15 = 3(k + 5)$ keine Primzahl. Lässt n bei Division durch 3 den Rest 1, d.h. $n = 3k + 1, k \in \mathbb{N}$, so ist $n + 5 = 3k + 6 = 3(k + 2)$ keine Primzahl. Bleibt also nur, dass n bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, d.h. $n = 3k+2, k \in \mathbb{N}$. Dann ist $n+1 = 3k+3 = 3(k+1)$. Das ist genau dann eine Primzahl, wenn $k = 0$ ist und damit $n = 2$. Dies ist die einzige solche Zahl $(n + 1 = 3, n + 5 = 7, n + 15 = 17)$.