TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

6. Lösungsblatt

für die Woche 25.11. - 01.12.2019

Rechnen mod n

Ü33 (a) Es sei R die Menge aller Symmetrieabbildungen eines Rechtecks, das kein Quadrat ist.

(1) Geben Sie alle diese Symmetrieabbildungen als Permutationen der Eckpunkte des Rechtecks an (die Eckpunkte seien gegen den Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3, 4$ bezeichnet).

(2) Zeigen Sie, dass $(R, \circ)$ mit der Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen eine Gruppe bildet. Stellen Sie dazu die Verknüpfungstafel auf und verwenden Sie diese für Ihre Argumentation.

(3) Ist $(R, \circ)$ abelsch?

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ mit der komponentenweisen Addition mod 2 eine Gruppe bildet. Stellen Sie die Verknüpfungstafel auf.

Lösung:

(a) (1) Zwei Drehungen: $d_1 = \text{id}$, $d_2 = (1\ 3)(2\ 4)$
und
zwei Spiegelungen: $s_1 = (1\ 2)(3\ 4)$, $s_2 = (1\ 4)(2\ 3)$

(3) Gruppentafel

$(R, \circ)$

$\circ$	d_1	d_2	s_1	s_2
d_1	d_1	d_2	s_1	s_2
d_2	d_2	d_1	s_2	s_1
s_1	s_1	s_2	d_1	d_2
s_2	s_2	s_1	d_2	d_1

Offenbar ist R nichtleer. Aus der Verknüpfungstafel ist weiterhin ablesbar, dass R bzgl. $\circ$ abgeschlossen ist, dass d_1 das neutrale Element ist und dass jedes Element ein Inverses besitzt, nämlich sich selbst. Es bleibt die Assoziativität zu zeigen: Seien $\alpha, \beta, \gamma \in R$ beliebig, dann gilt

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma) \iff \forall x \in \{1, 2, 3, 4\} : ((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)(x) = (\alpha \circ (\beta \circ \gamma))(x)$$

Für beliebiges $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ ist

$$((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)(x) = (\alpha \circ \beta)(\gamma(x)) = \alpha(\beta(\gamma(x)))$$

und ebenso

$$(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))(x) = \alpha((\beta \circ \gamma)(x)) = \alpha(\beta(\gamma(x))).$$

Damit ist die Assoziativität bewiesen.

(3) Die Gruppe ist abelsch, siehe Symmetrie der Gruppentafel bzgl. Hauptdiagonalen.

(b) Gruppentafel

$(Z_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$

$+$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

Die Gruppe in (a) hat offenbar bis auf Bezeichnungen der Elemente die identische Stuktur wie $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$. Somit ist $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ ebenfalls eine Gruppe, das neutrale Element ist $(0, 0)$.

H35 (a) Es sei $(G; \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Beweisen Sie die Kürzungsregeln:

$$\forall\, a, b, c \in G: \ a \circ b = a \circ c \ \Rightarrow\ b = c \qquad \text{und} \qquad b \circ a = c \circ a \ \Rightarrow\ b = c.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jede endliche Gruppe $(G; \circ)$ gilt: In der Verknüpfungstafel tritt in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element der Gruppe genau einmal auf.

Lösung:

(a) Es seien $a, b, c \in G$ beliebig. Dann gilt:

$$a \circ b = a \circ c \Rightarrow \underbrace{a^{-1} \circ a}_{=e} \circ b = \underbrace{a^{-1} \circ a}_{=e} \circ c \Rightarrow b = c.$$

Die andere Aussage beweist man analog.

(b) Zeigen zuerst indirekt, dass jedes Element höchstens einmal in jeder Zeile und jeder Spalte auftritt:
Angenommen, in einer Zeile der Gruppentafel sind zwei Einträge gleich, das bedeutet: Es gibt drei verschiedene Elemente a, b, c der Gruppe mit $a \circ b = a \circ c$. Aber daraus folgt aufgrund der Kürzungsregeln für Gruppen $b = c$ ↯. Analoges gilt für die Spalten.

H36 Zeigen Sie, dass die Menge $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ mit der Operation

$$a \circ b := a^{\ln b}$$

eine abelsche Gruppe bildet.

Lösung:

$\boxed{\text{abgeschlossen:}}$ Operation $\circ$ ist abgeschlossen in $(1, \infty)$.

$\boxed{\text{assoziativ:}}$ Das Assoziativgesetz ist erfüllt:

$(a \circ b) \circ c = (a \circ b)^{\ln c} = (a^{\ln b})^{\ln c} = a^{\ln b \cdot \ln c} = a^{\ln c \cdot \ln b} = a^{\ln(b^{\ln c})} = a^{\ln(b \circ c)} = a \circ (b \circ c)$.

$\boxed{\text{neutrales Element:}}$ e ist das neutrale Element, denn: $e \circ a = e^{\ln a} = a = a^1 = a^{\ln e} = a \circ e$.

$\boxed{\text{inverses Element:}}$ zu jeder reellen Zahl $a > 1$ existiert ein Inverses:

$a^{-1} := e^{\frac{1}{\ln a}}$, denn

$$a \circ a^{-1} = a^{\ln\left(e^{\left(\frac{1}{\ln a}\right)}\right)} = a^{\left(\frac{1}{\ln a}\right)} = a^{\log_a e} = e = e^{\frac{\ln a}{\ln a}} = (e^{\frac{1}{\ln a}})^{\ln a} = a^{-1} \circ a.$$

$\Rightarrow$ es ist eine Gruppe.

Kommutativität gilt: $a \circ b = a^{\ln b} = e^{\ln(a^{\ln b})} = e^{\ln b \cdot \ln a} = e^{\ln a \cdot \ln b} = e^{\ln(b^{\ln a})} = b^{\ln a} = b \circ a$.
$\Rightarrow$ die Gruppe ist abelsch.