TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

7. Lösungsblatt

für die Woche 02.12. - 08.12.2019

Gruppentheorie

H41 Gegeben ist die Gruppe $G = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ mit der folgenden Verknüpfungstafel:

$\circ$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_2	s_2	s_3	s_1	s_6	s_4	s_5
s_3	s_3	s_1	s_2	s_5	s_6	s_4
s_4	s_4	s_5	s_6	s_1	s_2	s_3
s_5	s_5	s_6	s_4	s_3	s_1	s_2
s_6	s_6	s_4	s_5	s_2	s_3	s_1

(a) Welches ist das neutrale Element?

(b) Finden Sie alle Untergruppen von G und geben Sie deren Ordnung an. Begründen Sie, dass es keine weiteren gibt.

(c) Ermitteln für alle nichttrivialen Untergruppen jeweils alle ihre Linksnebenklassen in G.

(d) Ist $(G; \circ)$ abelsch? Ist $(G; \circ)$ zyklisch?

(e) Ist $(G; \circ)$ zu $(\mathbb{Z}_{14}^*; \cdot)$ isomorph?

Lösung:

(a) s_1.

(b) Untergruppen von G:

$$\begin{array}{ll}
\text{Ordnung } 1: & U_1 = \{s_1\} \\
\text{Ordnung } 2: & U_2 = \{s_1, s_4\}, U_3 = \{s_1, s_5\}, U_4 = \{s_1, s_6\} \\
\text{Ordnung } 3: & U_5 = \{s_1, s_2, s_3\} \\
\text{Ordnung } 6: & U_6 = S_3
\end{array}$$

(c) $\underline{U_2 = \{s_1, s_4\}}$:

$$\begin{array}{l}
\text{LNK} - \text{Zerlegung}: \\
s_1U_2 = \{s_1 \cdot s_1, s_1 \cdot s_4\} = \{s_1, s_4\} \\
s_2U_2 = \{s_2 \cdot s_1, s_2 \cdot s_4\} = \{s_2, s_6\} \\
s_3U_2 = \{s_3 \cdot s_1, s_3 \cdot s_4\} = \{s_3, s_5\} \\
s_4U_2 = \{s_4 \cdot s_1, s_4 \cdot s_4\} = \{s_4, s_1\} \\
s_5U_2 = \{s_5 \cdot s_1, s_5 \cdot s_4\} = \{s_5, s_3\} \\
s_6U_2 = \{s_6 \cdot s_1, s_6 \cdot s_4\} = \{s_6, s_2\} \\
\Rightarrow \ \{\{s_1, s_4\}, \{s_2, s_6\}, \{s_3, s_5\}\}
\end{array}$$

$\underline{U_3 = \{s_1, s_5\}}$:

LNK-Zerlegung $\{\{s_1, s_5\}, \{s_2, s_4\}, \{s_3, s_6\}\}$

$\underline{U_4 = \{s_1, s_6\}}$:

LNK-Zerlegung $\{\{s_1, s_6\}, \{s_2, s_5\}, \{s_3, s_4\}\}$

$\underline{U_5 = \{s_1, s_2, s_3\}}$:

LNK-Zerlegung

$$\left.\begin{array}{lll} s_iU_5 = \{s_1, s_2, s_3\} & \text{falls} & i = 1, 2, 3 \\ s_iU_5 = \{s_4, s_5, s_6\} & \text{falls} & i = 4, 5, 6 \end{array}\right\} \implies \{\{s_1, s_2, s_3\}, \{s_4, s_5, s_6\}\}$$

(d) G ist nicht abelsch, da z.B. $s_4 \cdot s_2 \neq s_2 \circ s_4$. G ist nicht zyklisch, es gibt kein erzeugendes Element (ergibt sich aus der Betrachtung der Untergruppen).

(e) nein, da nicht abelsch.

H42 Es wird die Diedergruppe D_5, d.h. die Gruppe aller Symmetrieabbildungen eines regelmäßigen Fünfecks, betrachtet. Die Eckpunkte des Fünfecks seien mit den Zahlen 1 bis 5 fortlaufend beschriftet.

(a) Geben Sie alle Elemente der Diedergruppe D_5 durch Permutationen in Zyklenschreibweise an.

(b) Welche Ordnungen können die Untergruppen von D_5 besitzen? Bestimmen Sie alle Untergruppen, die von genau einem Element ertzeugt werden und geben sie deren Ordnung an.

(c) Ist D_5 zyklisch?

Lösung:

(a) Bewegungen eines regelmäßigen Fünfecks (Eckpunkte bezeichnet mit $1, \dots, 5$):

$\boxed{\text{Drehungen:}}$ $\sigma_0 = \text{id}$, $\sigma_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\sigma_2 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$,
$\sigma_3 = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$, $\sigma_4 = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$,

$\boxed{\text{Spiegelungen:}}$ $\sigma_5 = (2\ 5)(3\ 4)$, $\sigma_6 = (1\ 3)(4\ 5)$, $\sigma_7 = (1\ 5)(2\ 4)$,
$\sigma_8 = (1\ 2)(3\ 5)$, $\sigma_9 = (1\ 4)(2\ 3)$.

(b) Die Untergruppenordnung teilt die Gruppenordnung. Da $|D_5| = 10$, können also nur Untergruppen der Ordnung 1, 2, 5 und 10 auftreten.

- einzige UG der Ordnung 1 ist $< \sigma_0 >= \{\sigma_0\}$.
- UG der Ordnung 2 durch die Spiegelungen erzeugt: $< \sigma_j >= \{\sigma_0, \sigma_j\},\ j = 5, 6, 7, 8, 9$.
- UG der Ordnung 5 ist nur die Drehgruppe:
  $< \sigma_1 >= \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\} =< \sigma_2 >=< \sigma_3 >=< \sigma_4 >$.
- einzige UG der Ordnung 10 ist D_5 selbst.

Weitere UG gibt es nicht, denn jede Teilmenge von D_5, die eine (echte) Drehung und eine Spiegelung enthält, erzeugt ganz D_5, da die Drehgruppe und ein weiteres Element enthalten sind. Und je zwei Spiegelungen erzeugen eine Drehung (s. Teil (c)).

(c) Da die Drehungen nur die Drehgruppe und die Spiegelungen nur Untergruppen der Ordnung 2 erzeugen, ist D_5 nicht zyklisch.