

10. Lösungsblatt

für die Woche 06.01. - 12.01.2020

Graphentheorie

Ü56 (b) Beweisen Sie: Der Blockgraph eines zusammenhängenden Graphen ist zusammenhängend.

Lösung:

- (b) Es sei G ein zusammenhängender Graph. Zeigen zunächst per Induktion über n , dass wenn es einen Pfad v_1, \dots, v_n der Länge n zwischen zwei Gelenkpunkten v_1, v_n in G gibt, dann auch einen Pfad zwischen v_1, v_n im Blockgraphen - dies sei die Aussage $A(n)$.

Induktionsanfang: Diese Aussage ist trivialerweise für $n = 1$ richtig.

Induktionsschritt: Zeigen: $\forall n \geq 1$: Wenn $A(k)$ für alle $1 \leq k \leq n$ gilt, dann auch $A(n+1)$.

Beweis: Es sei v_1, \dots, v_{n+1} ein Pfad der Länge $n+1$ zwischen zwei Gelenkpunkten v_1, v_{n+1} in G . Sei weiter j grösstmöglicher Index, so dass alle Knoten v_1, v_2, \dots, v_j im gleichen Block B von G liegen. Dann muss v_j ein Gelenkpunkt von G sein. (Für Brücken ist das trivial, isolierte Knoten kommen nicht in Frage und bei zweifach zusammenhängenden Subgraphen gibt es für alle anderen Knoten des Pfades eine weitere Kante im Block, um den Pfad fortzusetzen.)

Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Pfad \bar{w} von v_j nach v_{n+1} im Blockgraphen. Der Pfad im Blockgraphen von v_1 nach v_{n+1} ist dann $v_1 \rightarrow B \rightarrow \bar{w}$.

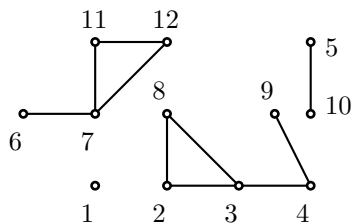
Um zu zeigen, dass der Blockgraph von G zusammenhängend ist, muss gezeigt werden, dass für beliebige zwei Knoten a, b des Blockgraphen ein Pfad zwischen ihnen existiert.

Wenn sowohl a als auch b Gelenkpunkte von G sind, dann gibt es einen Pfad von a nach b in G , da G zusammenhängend ist, also auch einen Pfad zwischen a und b im Blockgraphen - diesen Fall haben wir oben behandelt.

Wir diskutieren nun den Fall, dass b Gelenkpunkt in G ist, nicht aber a . Der Fall, dass a Gelenkpunkt ist, nicht aber b , läuft analog.

Der Fall, dass a und b Blöcke sind, geht ganz ähnlich.

Sei also a ein Block, b Gelenkpunkt. Wählen $v_1 \in a$ beliebig. Da G zusammenhängend, gibt es einen Pfad $v_1, v_2, \dots, v_k = b$ in G . Sei nun i maximal, so dass v_1, \dots, v_i allesamt in a liegen. Dann ist v_i Gelenkpunkt, und nach der Aussage oben gibt es einen Pfad \bar{w} von v_i nach v_k . Dann ist a, \bar{w} der gewünschte Pfad von a nach $v_k = b$.

 H59 (a) Der Graph $G = (V, E)$ ist durch folgendes Diagramm gegeben:


- (1) Bestimmen Sie alle Blöcke von G und zeichnen Sie ein Diagramm des Blockgraphen.
- (2) Ist das Komplement desjenigen induzierten Subgraphen H von G , der die Knotenmenge $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$ besitzt, zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wie viele Kanten hat ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und genau $n-3$ Brücken?

Lösung:

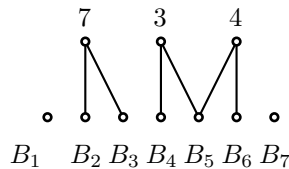
- (a) (1) Sieben Blöcke B_1, \dots, B_7 mit Knotenmengen: $\{1\}, \{6, 7\}, \{7, 11, 12\}, \{2, 3, 8\}, \{3, 4\}, \{4, 9\}$ bzw. $\{5, 10\}$.

Blockgraph G_B zu G :

$$V(G_B) = \{ \underbrace{3, 4, 7}_{\text{Gelenkpunkte}}, \underbrace{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7}_{\text{Blöcke}} \},$$

$$E(G_B) = \{ \{3, B_4\}, \{3, B_5\}, \{4, B_5\}, \{4, B_6\}, \{7, B_2\}, \{7, B_3\} \}.$$

Diagramm:



- (2) Da 1 ein isolierter Knoten ist, sind alle Kanten von 1 zu den anderen Knoten im Komplement des induzierten Subgraphen enthalten, also ist dieser zusammenhängend.

- (b) (V, E) sei ein zusammenhängender Graph mit $|V| = n$ Ecken und genau $n-3$ Brücken. Die Menge dieser Brücken sei $B \subseteq E$.

Da (V, E) zusammenhängend ist, ist $|E| \geq n-1$, folglich $E \setminus B \neq \emptyset$. Der Graph $(V, E \setminus B)$ hat mindestens $n-2$ Zusammenhangskomponenten, denn die Wegnahme jeder Brücke erhöht die Zahl der Zusammenhangskomponenten.

Jede Kante, die keine Brücke ist, liegt in einem Kreis, und umgekehrt ist keine Kante eines Kreises eine Brücke. Es gibt also in $(V, E \setminus B)$ mindestens einen Kreis (Länge ≥ 3) und damit mindestens eine Zusammenhangskomponente mit ≥ 3 Ecken.

Da es mindestens $n-2$ Zusammenhangskomponenten gibt, jede davon mindestens eine Ecke enthält, eine dabei mindestens 3 Ecken enthält und insgesamt nur n Ecken vorhanden sind, gibt es nur eine Möglichkeit: Alle bis auf eine Zusammenhangskomponente sind einelementig, und eine ist ein Kreis mit drei Elementen. Also ist auch $E \setminus B$ dreielementig, und da B aus genau $n-3$ Brücken besteht, enthält E genau n Kanten.

- H60 (a) Finden Sie einen unbenannten bipartiten Graphen mit 14 Knoten und maximaler Anzahl Kanten und zeichnen Sie ein Diagramm des Graphen. Ist der Graph eindeutig bestimmt?

- (b) Beweisen Sie, dass es in einem Graphen mit n Knoten höchstens $n-2$ Gelenkpunkte gibt.

Lösung:

- (a) Bipartiter Graph mit 14 Knoten: Partition (V_1, V_2) der Knoten. Mit $m := |V_1|$, $n = |V_2|$ folgt aus der Eigenschaft bipartit, dass der Graph $m \cdot n = (14-n)n$ Kanten hat. Die Funktion $f(x) = (14-x)x$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel bei $x_S = 7$. Folglich ist die Kantenzahl für $m = n = 7$ maximal. Der Graph ist eindeutig bestimmt.

- (b) Mit vollständiger Induktion:

IA: Ein Graph mit 1 oder 2 Knoten besitzt offenbar keine Gelenkpunkte. Ein Graph mit 3 Knoten hat offenbar nur höchstens 1 Gelenkpunkt (die Kette).

IS: Zeigen, wenn Graphen mit kleiner gleich n Knoten höchstens $n-2$ Gelenkpunkte besitzen, dann besitzen Graphen mit $n+1$ Knoten höchstens $n-1$ Gelenkpunkte.

Beweis: Es möge einen Gelenkpunkt für einen gegebenen Graphen mit $n+1$ Knoten ($n_i \geq 2$) geben. Dann zerfällt der Graph ohne diesen Knoten und die inzidenten Kanten in k Teilgraphen mit m_1, \dots, m_{k-1} bzw. $n - (m_1 + \dots + m_{k-1})$ Knoten. Nach IV haben diese Graphen höchstens Anzahl Knoten - 2 Gelenkpunkte. Also hat der ursprüngliche Graph insgesamt höchstens

$$(m_1 - 2) + \dots + (m_{k-1} - 2) + n - (m_1 + \dots + m_{k-1}) - 2 + k + 1 = n + 1 - k \quad \text{Gelenkpunkte}$$

(der Summand $k+1$ kommt daher, dass neben dem ausgewählten Gelenkpunkten all seinen Nachbarn Gelenkpunkte sein könnten). Da der Graph beim Streichen eines Gelenkpunktes in mindestens 2 Zusammenhangskomponenten zerfällt, ist $k \geq 2$.