Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

11. Lösungsblatt

für die Woche 13.01. - 19.01.2020

Graphentheorie

Ü63 Zeichnen Sie jeweils, wenn möglich, ein Diagramm eines Graphen $G = (V, E)$ mit den gegebenen Eigenschaften (Tipp: Es hilft in vielen Fällen das Handschlaglemma.):

(a) $|V| = 5$, $|E(\overline{G})| = 4$, und G hat mindestens einen Blattknoten;

(b) G ist 2-regulär und hat 8 Kanten,

(c) G ist 3-regulär und hat 7 Kanten,

(d) G ist 4-regulär und hat 12 Kanten.

In welchen Fällen gibt es einen bipartiten Graphen mit den gegebenen Eigenschaften? **Lösung:**

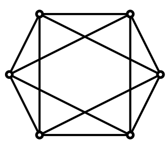
(a) ein Graph mit 5 Knoten, davon mindestens ein Blattknoten, und $|E(K_5)| - |E(\overline{G})| = \binom{5}{2} - 4 = 10 - 4 = 6$ Kanten. Zwei verschiedene unbenannte Graphen möglich:

Beide sind nicht bipartit, da sie Kreise ungerader Länge (Länge 3) enthalten.

(b) Gemäß der Formel $2|E| = \sum\limits_{v \in V} \deg(v)$, muss der Graph genau 8 Knoten besitzen. Das bedeutet, es handelt sich um ein oder mehrere Kreise. Der Kreis C_8 und die zwei Kreise C_4 sind jeweis bipartite Graphen. Das Paar aus den Kreisen C_3 und C_5 ist nicht bipartit.

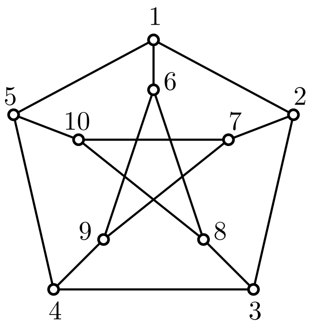
(c) kein Graph, da die Formel $2|E| = \sum\limits_{v \in V} \deg(v)$ nicht erfüllbar ist: $14 = 3|V|$ für $|V| \in \mathbb{N}$.

(d) Gemäß der Formel $2|E| = \sum\limits_{v \in V} \deg(v)$, muss der Graph genau 6 Knoten besitzen ($2 \cdot 12 = 4 \cdot |V|) \Rightarrow |V| = 6$, z.B. das Diagramm

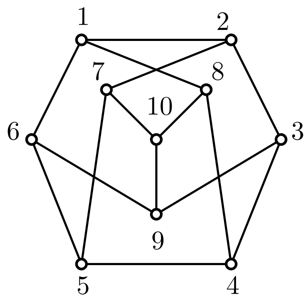


Kein bipartiter Graph möglich, da es Kreise der Länge 3 geben muss: Jeder Knoten ist mit 4 anderen verbunden, und jeder dieser 4 Knoten ist mit 4 Knoten verbunden, also mit mindestens zwei der letzteren Knoten.

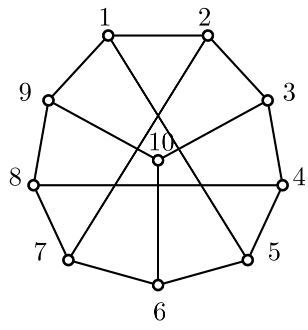
H65 Sind die Graphen G_1, G_2 und G_3, die durch die drei Diagramme gegeben sind, zueinander isomorph? Geben Sie gegebenenfalls einen Isomorphismus an.



G_1

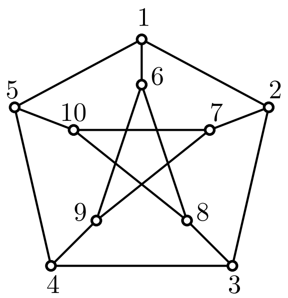


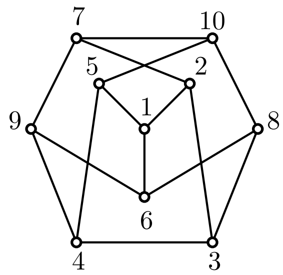
G_2

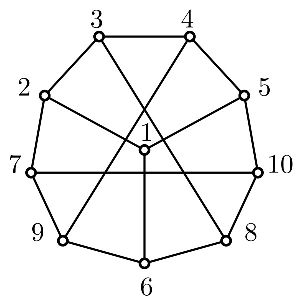


G_3

Lösung:
Es ist möglich, in den angegebenen Graphendiagrammen die Ecken so zu beschriften, dass jeweils der gleiche Graph entsteht, also sind die Graphen isomorph (daraus läßt sich auch der zugehörige Isomorphismus ablesen).







Die Graphen sind also allesamt isomorph.

H66 Zeigen Sie, dass für einen k-regulären Graphen sein Kantengraph $(2k-2)$-regulär ist.

Lösung:
Es sei $\{u, v\}$ eine beliebige Kante des Graphen. Dann bildet sie einen Knoten seines Kantengraphen. Der Knoten u ist mit v und $\deg(u)-1$ weiteren Knoten über Kanten verbunden, analog ist v mit u und $\deg(v)-1$ weiteren Knoten verbunden. Folglich hat der Knoten $e = \{u, v\}$ des Kantengraphen den Grad

$$\deg(e) = \deg(u) - 1 + \deg(v) - 1.$$

Da der Graph k-regulär ist, folgt $\deg(e) = 2k - 2$.