Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

12. Lösungsblatt

für die Woche 20.01. - 26.01.2020

Relationen

Ü68 (c) Auf der Menge $A = \{1, 2, \cdots, 8\}$ wird die Relation $R = \{(x, y) \mid x \bmod y = 2 \text{ und } |x - y| > 1\}$ betrachtet.

(1) Geben Sie R als Menge konkreter Paare an.

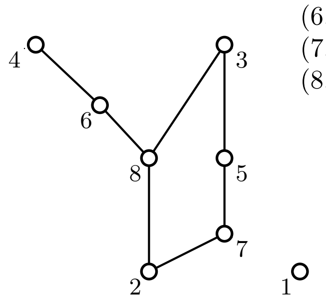
(2) Kann man eine partielle Ordnung finden, die R enthält?
Bestimmen Sie gegebenenfalls die kleinste partielle Ordnung T, die R enthält, und zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm von T. Erweitern Sie T zu einer linearen Ordnung.

Lösung:

(c)
- $R = \{(2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (5,3), (6,4), (7,5), (8,6), (8,3)\}$.
- R ist azyklisch, deshalb läßt sie sich zu einer Ordnungsrelation erweitern.
  Kleinste Ordnungsrelation T, die R enthält:

  $R^2 = \{(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (7,3), (8,4)\}$
  $R^3 = \{(2,3), (2,4)\}$
  $R^4 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad R^n = \emptyset, n \geq 4$
  $\Rightarrow \ \mathrm{trans(R) = R \cup R^2 \cup R^3 = R \cup \{(2,3), (7,3), (8,4)\}}$.

  $T = \mathrm{trans(R)} \cup \{(\mathrm{a},\mathrm{a}) \mid \mathrm{a} \in \mathrm{A}\} = \{(\mathrm{a},\mathrm{a}) \mid \mathrm{a} \in \mathrm{A}\} \cup \{(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8),$
  $(5,3),$
  $(6,4),$
  $(7,3), (7,5),$
  $(8,3), (8,4), (8,6)\}$.



Hasse-Diagramm von T
Es gibt viele verschiedene lineare Erweiterungen, d.h eine passende Kette zu erzeugen. Es muss nur die bisherige Sortierung erhalten bleiben. Z.B. (im Hasse-Diagramm von unten nach oben): 2-1-7-8-5-6-3-4.

Ü67 Für eine endliche Menge $A \neq \emptyset$ und eine Abbildung $f : A \to A$ wird die Relation

$$R_f = \{(a, b) \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ b = f^n(a)\}$$

betrachtet. (Dabei ist f^n die n-malige Hintereinanderausführung von f, $f^0 = \mathrm{id}$.)

(a) Zeigen Sie, dass R_f eine Quasiordnung ist.

(b) Zeigen Sie, dass R_f genau dann eine partielle Ordnung ist, wenn kein Zyklus der Länge ≥ 2 in R_f existiert, d.h. keine Folge $(a_1, a_2), \ldots, (a_n, a_1)$ mit $a_1 \neq a_2$.

(c) Untersuchen Sie, ob R_f für $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5, f(a) := a^2 + 1 \pmod{m}$ eine partielle Ordnung ist.

Lösung:

(a) $\boxed{\text{Quasiordnung:}}$

reflexiv, denn: $a = f^0(a) \Rightarrow (a,a) \in R_f$ für alle $a \in A$.
transitiv, denn: $(a,b) \in R_f$ und $(b,c) \in R_f$
$\Rightarrow \exists n,m \in \mathbb{N}: \; b = f^n(a), c = f^m(b) \;\Rightarrow\; c = f^{m+n}(a) \;\Rightarrow\; (a,c) \in R_f$.

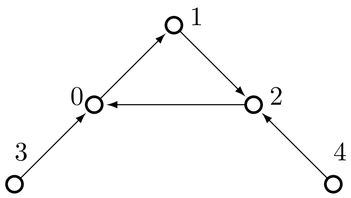
(b) $\boxed{\text{Ordnung:}}$

Eine Quasiordnung ist Ordnung gdw. sie antisymmetrisch ist.

Existiert ein Zyklus der Länge ≥ 2 in R_f, so gibt es $a, b \in A, a \neq b, n > 0, m > 0: \; f^n(a) = b$ und $f^m(b) = a \Rightarrow (a,b) \in R_f$ und $(b,a) \in R_f \Rightarrow R_f$ nicht antisymmetrisch.

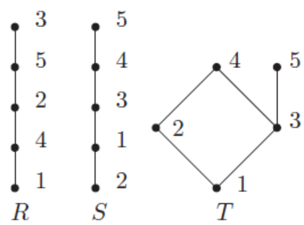
Ist R_f nicht antisymmetrisch, so existieren $a, b \in A, a \neq b$ mit $(a,b) \in R_f, (b,a) \in R_f$
$\Rightarrow$ es existiert ein Zyklus $(a,b)(b,a)$ der Länge 2.

(c) $\boxed{\mathbb{Z}_5:}$ $\qquad 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 0, 3 \mapsto 0, 4 \mapsto 2$



Keine Ordnung.

H72 (a) Nebenstehend sind Diagramme dreier Ordnungsrelationen R, S und T auf der Menge $A = \{1,2,3,4,5\}$ gezeichnet.



(1) Geben Sie $R \cap S$ und $T \circ S$ jeweils als Menge von Paaren an. Welche der Relationen sind linear?

(2) Ist $R \cap S$ eine partielle Ordnung? Ist sie linear?

(3) Ist $T \circ S$ eine partielle Ordnung?

(b) Es ist auf der Menge $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ folgende Relation gegeben:

$$R = \left\{ (x,y) \,\middle|\, x < y, \; \text{ggT}(x,y) > 1 \right\} .$$

(1) Geben Sie die Relationen R, R^2 und R^3 jeweils als Menge von Paaren an.

(2) Warum läßt sich R zu einer Ordnungsrelation erweitern? Bestimmen Sie die kleinste Ordnungsrelation T, die R enthält, und zeichnen Sie ein Ordnungsdiagramm für T.

Lösung:

(a) (1) $R \cap S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,5),(4,5)\}$
$T \circ S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),$
$(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$
(Bemerk: $T \circ S$ enthält hier T und S.)

(2)

$T \circ S$	1	2	3	4	5
1	x	x	x	x	x
2	x	x	x	x	x
3	0	0	x	x	x
4	0	0	0	x	x
5	0	0	0	0	x

$R \cap S$ ist Ordnungsrelation, jedoch nicht linear, obwohl R und S linear sind.

(2) Das Relationenprodukt $T \circ S$ ist nicht antisymmetrisch $\;\Rightarrow\;$ keine Ordnungsrelation.

(b) (1) $R = \{(x, y \mid x < y\ , \mathrm{ggT}(x,y) > 1\},\ A = \{1, ...,\ 9\}$.

$\Rightarrow \quad R = \{(2,4),\ (2,6),\ (2,8),\ (3,6),\ (3,9),\ (4,6),\ (4,8),\ (6,8),\ (6,9)\}$

$\Rightarrow \quad R^2 = R \circ R = \{(2,6),\ (2,8),\ (2,9),\ (3,8),\ (3,9),\ (4,8),\ (4,9)\}$

$\Rightarrow \quad R^3 = R \circ R^2 = \{\ (2,8),\ (2,9)\}$

(2) R läßt sich zu Ordnung erweitern, da R azyklisch ist.
$T = \mathrm{trans(R)} \cup\ (\Delta_A)$.
Ordnungsdiagramm: