TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

13. Lösungsblatt

für die Woche 27.01.-02.02.2020

Bäume, Prüfercode

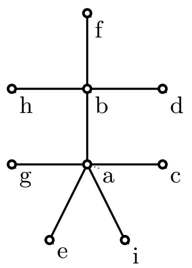
Ü74 (a) Wie sieht ein Baum mit Knotenmenge $V = \{0, 1, \ldots, 8\}$ und Prüfercode (a, b, a, b, a, b, a) mit $a, b \in V$ aus?

Lösung:

(c) Bezeichnen die Elemente in $V \setminus \{a, b\}$ mit c, d, e, f, g, h, i geordnet nach ihrer Größe. Graph für den Code (a, b, a, b, a, b, a):

$b_i, i = 0, \ldots, 6$	$(b_0, \ldots, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_6)$
c	c
d	c d
e	c d e
f	c d e f
g	c d e f g
h	c d e f g h

1. Fall: $b < i \;\Rightarrow\; (b_0, \ldots, b_6) = (c, d, e, f, g, h, b)$



2. Fall: $i < b \;\Rightarrow (b_0, \ldots, b_6) = (c, d, e, f, g, h, i)$ und der Graph ist derselbe.

Ü73 Betrachtet werden die zwei Graphen mit den folgenden Adjazenzmatrizen:

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie jeweils anhand des Handschlaglemmas die Anzahl Kanten. Nutzen Sie das Ergebnis, um zu entscheiden, ob der Graph ein Baum sein *kann*.

(b) Zeichnen Sie für beide Graphen je ein Diagramm.

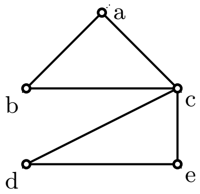
(c) Bestimmen Sie die Anzahl aller Spannbäume der Graphen aus (i) bzw. (ii) einerseits mittels des Satzes von Kirchhoff, andererseits direkt anhand des Diagramms.

Lösung:

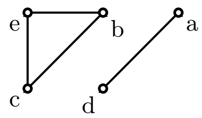
(a) Es gilt für einen Graphen $G = (V, E)$ allgemein $\sum\limits_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$. Für einen Baum gilt $|E| = |V| - 1$. Folglich:

(i): $|E| = 6$, und da $|V| = 5$ kann der Graph kein Baum sein.
(ii): $|E| = 4$, und da $|V| = 5$ könnte der Graph ein Baum sein. Er ist jedoch keiner.
Bemerkung: Aus der Adjazenzmatrix läßt sich die Erreichbarkeitsmatrix konstruieren. Sie ist in diesem Falle gleich der Adjazenzmatrix + Einheitsmatrix und zeigt, dass der Graph nicht zusammenhängend ist. Folglich ist es auch kein Baum.

(b) (i)



(ii)



(c) (i) $D - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(D - A)_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$\det(D-A)_3 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9.$$

Der Graph hat folglich 9 Spannbäume.
Aus dem Diagramm ist ersichlich, dass es zwei Dreiecke gibt: $\triangle$abc und $\triangle$cde. Einem Spannbaum des Graphen gehören je zwei Kanten beider Dreiecke an; auf diese Weise sind alle Spannbäume charakterisiert. Dafür gibt es $\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2} = 9$ Möglichkeiten.

(ii) $D - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(D - A)_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$\det(D - A)_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 + (-1)(-1 + 4) = 0.$$

Der Graph besitzt keinen Spannbaum. Aus dem Diagramm ist das sofort klar, da G nicht zusammenhängend ist.

H74 (a) Ein Baum $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{0, 1, \ldots, 8\}$ ist durch den Prüfercode $(2, 8, 1, 0, 0, 4, 2)$ gegeben.

(1) Bestimmen Sie aus dem Prüfercode, welche Knoten Blätter des Baumes sind.
(2) Zeichnen Sie ein Diagramm des Baumes G.
(3) Wie ändert sich der Prüfercode, wenn der Baum durch den Knoten 9 und die Kante $\{0, 9\}$ erweitert wird?

(b) Wie viele Bäume gibt es auf der Knotenmenge $V = \{0, 1, \ldots, 7\}$?

(c) Gesucht ist die Anzahl aller Bäume mit Knotenmenge $V = \{0, 1, \ldots, 9\}$, in denen jeder Knoten ungeraden Grad hat. Ermitteln Sie diese Anzahl.
(Hinweis: Es genügt, sich alle solchen unbenannten Bäume (Isomorphieklassen) zu überlegen, und dafür dann die möglichen Zuordnungen der Zahlen $\{0, 1, \ldots, 9\}$ zu den Knoten zu zählen).

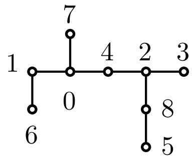
Lösung:

(a) (1) Blätter sind diejenigen Knoten, die nicht im Code vorkommen: 3,5,6,7

(2) Prüfer-Code: $(2,8,1,0,0,4,2)$

$b_i, i = 0, \ldots, 6$	$(b_0, \ldots, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_6)$
3	$\boxed{3\ 8\ 1\ 0\ 0\ 4\ 2}$
5	$\boxed{3\ 5\ 1\ 0\ 0\ 4\ 2}$
6	$\boxed{3\ 5\ 6\ 0\ 0\ 4\ 2}$
1	$\boxed{3\ 5\ 6\ 1\ 0\ 4\ 2}$
7	$\boxed{3\ 5\ 6\ 1\ 7\ 4\ 2}$
0	$\boxed{3\ 5\ 6\ 1\ 7\ 0\ 2}$
4	$\boxed{3\ 5\ 6\ 1\ 7\ 0\ 4}$

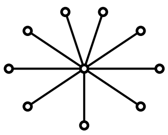
Es ist also $(b_0, \ldots, b_6) = (3,5,6,1,7,0,4)$. Die Kanten des Baumes sind $\{a_i, b_i\}, i = 0, \ldots, 6$ sowie $e = V \setminus \{b_0, \ldots, b_6\} = \{2,8\}$.
Diagramm des Baumes:



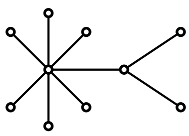
(3) Wenn der Baum durch den Knoten 9 und die Kante $\{0,9\}$ erweitert wird, ist der Prüfercode $(2,8,1,0,0,2,4,0)$.

(b) Es sind nach dem Satz von Cayley 8^6 Bäume.

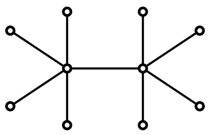
(c) Jeder Baum mit 10 Knoten hat genau 9 Kanten. Es gibt als ungerade Kantengrade also nur die Möglichkeiten: 1,3,5,7,9.
Es genügt, sich alle zugehörigen unbenannten Bäume (Isomorphieklassen) zu überlegen:
1.) ein Knoten mit 9 Kanten, alle weiteren sind Blätter: Stern



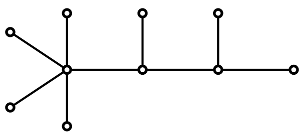
2.) ein Knoten mit 7 Kanten, ein Knoten mit 3 Kanten, alle weiteren sind Blätter

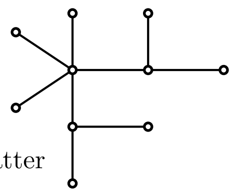


3.) zwei Knoten mit 5 Kanten (durch eine Kante direkt verbunden), alle weiteren sind Blätter

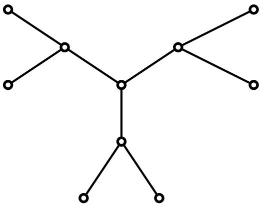


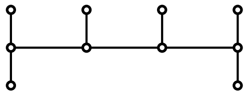
4.) ein Knoten mit 5 Kanten, zwei Knoten mit 3 Kanten, alle weiteren sind Blätter
zwei Varianten:





5.) 4 Knoten mit 3 Kanten, alle weiteren sind Blätter
zwei Varianten:





Die Anzahl möglicher Bäume in den einzelnen Isomorphieklassen ist:
1.) 10

2.) $10 \cdot 9 \cdot \binom{8}{2}$

3.) $\frac{1}{2}\binom{10}{5} \cdot 5^2 = \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4}$

4.) $10 \cdot \binom{9}{4} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \;+\; 10 \cdot \binom{9}{3}\frac{1}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot 3^2$

5.) $10 \cdot \frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}}{3!} \cdot 3^3 \;+\; \frac{1}{2}10 \cdot \binom{9}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

oder über Prüfercodes:
1.) (aaaaaaaa)
2.) 2x a und 6x b
3.) 4x a und 4x b
4.) 2x a und 2x b und 4x c, Anzahl : $\frac{8!}{4!\,2!\,2!} \cdot \frac{10\cdot 9\cdot 8}{2}$ (gibt dasselbe wie oben)
5.) 2x a und 2x b und 2x c und 2x d, Anzahl : $\frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!} \cdot \binom{10}{4}$ (gibt dasselbe wie oben)

Insgesamt: 686080 solche Bäume.

H75 Es sei G der Graph mit Knotenmenge $V = \{a, b, c, d\}$ und Adjazenzmatrix

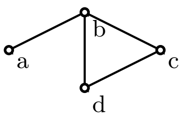
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie ein Diagramm des Graphen G.

(b) Berechnen Sie die Anzahl aller Spannbäume des Graphen G mittels des Satzes von Kirchhoff. Bestimmen Sie die Anzahl der Spannbäume von G alternativ aus Überlegungen anhand des Diagramms von G (Ein Weg wäre, alle Spannbäume zu zeichnen, dies ist aber nicht notwendig.)

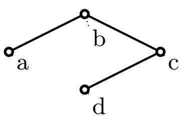
Lösung:

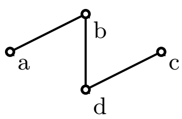
H76 (a)

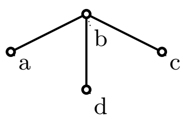


(b) $D - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(D-A)_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

Der Graph hat 3 Gerüste. Diese sind:

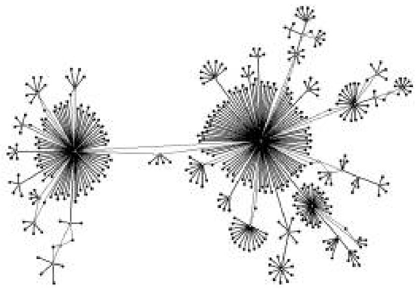






H77 Einen zusammenhängenden Graphen, in dem jede Kante in *höchstens* einem Kreis liegt, nennt man auch einen *Kaktus*.

Welche Kakteen mit 10 Knoten haben eine maximale Anzahl von Spannbäumen, und wie viele solche Bäume haben sie?



Beispiel eines Kaktus mit mehr als 10 Knoten

Lösung:

Für jeden Kaktus gilt, dass keine Kante in zwei Kreisen liegt und dass der Graph zusammenhängend ist. Folglich haben zwei Kreise im Kaktus maximal einen Knoten gemeinsam. Außerdem gilt stets für Graphen

- Kanten, die zu keinem Kreis gehören, sind genau die Brücken des Graphen. Sie sind in jedem aufspannenden Baum enthalten.
- jeder Kreis hat stets die gleiche Zahl an Kanten und Knoten.

Es seien K die Anzahl Kreise in einem Kaktus und $n_1, \ldots, n_K$ die entsprechenden Kantenzahlen der Kreise und $n = \sum_{j=1}^{K} n_j$. Dann gibt es genau $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$ verschiedene aufspannende Bäume im Kaktus. Da zwei Kreise im Kaktus je maximal einen Knoten gemeinsam haben, ist für einen aufspannenden Baum eines Kaktus aus jedem Kreis genau eine beliebige Kante wegzulassen. Da weiterhin jeder Kreis genauso viel Knoten wie Kanten hat, folgt, dass (,wenn man von einem Kreis ausgehend alle Kreise in beliebiger Reihenfolge durchläuft,) mindestens $3+2(K-1)$ Knoten des Graphen besucht werden. Damit gilt

$$3 + 2(K-1) \leq 10 \quad \Rightarrow \quad K \leq 4.5$$

Es kann also höchstens K=4 verschiedene Kreise geben. Fallunterscheidung:

1.Fall es existiert ein Kreis mit mindestens 7 Knoten. Dann existiert (verbleibend maximal 3 Knoten) noch höchstens ein weiterer Kreis im Kaktus und hat max. 4 Knoten. Also ist hier die Anzahl aufspannender Bäume $\leq 10 \cdot 4 = 40$.

2. Fall es existiert ein Kreis mit 5 oder 6 Knoten. Dann existeren (verbleibend maximal 5 Knoten) noch höchstens zwei weitere Kreise im Kaktus. Bei zwei weiteren haben diese max. 4 Knoten bzw. 3 Knoten, bei einem hat dieser max. 6 Knoten. Also ist hier die Anzahl aufspannender Bäume $\leq \max\{6 \cdot 4 \cdot 3, 6 \cdot 6\} = 72$.

3.Fall es existieren nur Kreise mit höchstens 4 Knoten. Gibt es zwei Kreise mit 4 Knoten, so kann es (verbleibend maximal 3 Knoten) noch höchstens einen weiteren Kreis im Kaktus geben, und zwar mit max. 4 Knoten. Also ist hier die Anzahl aufspannender Bäume $\leq 4^3 = 64$. Gibt es nur einen Kreis mit 4 Knoten, kann es max. drei weitere Kreise mit 3 Knoten geben. Für den Fall ist die max. Anzahl aufspannender Bäume gerade $4 \cdot 3^3$. Da es nur max. 4 Kreise geben kann, ist dies der max. Wert für die Anzahl aufspannender Bäume.

Ergebnis: Alle Kakteen-Typen mit vier Kreisen, von denen einer 4 Knoten besitzt (und die anderen ein jeder 3 Knoten), haben eine maximale Anzahl aufspannender Bäume unter allen Kakteen mit 10 Knoten.