TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

14. Lösungsblatt

für die Woche 03.02. - 09.02.2020

Planare Graphen

H82 (a) Wie viele Knoten muss ein 4-fach zusammenhängender, planarer Graph mindestens besitzen? Geben Sie einen solchen mit minimaler Knotenanzahl durch eine Zeichnung an.

(b) Es sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit n Knoten und m Kanten. Zeigen Sie, dass für $n \geq 11$ das Komplement $\overline{G}$ nicht planar ist.

(Hinweis: Es läßt sich hier sehr gut Korollar 111 des Kapitels Planare Graphen verwenden.)

Lösung:
Nach Korollar 111 des Kapitels 'Planare Graphen' verfügt ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten über höchstens $3n - 6$ Kanten.

(a) Nach dem Handschlaglemma gilt für einen 4-fach zusammenhängenden Graphen (Anzahl Kanten sei k):

$$2k = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 4n \quad \Rightarrow \; k \geq 2n.$$

Es folgt $2n \leq k \leq 3n - 6$, und damit $n \geq 6$. Z.B. ist der 4-reguläre Graph mit 6 Knoten planar, wie man sich durch ein geeignetes Diagramm leicht klar macht.

(b) Für einen planaren Graphen gilt die Ungleichung $k \leq 3n - 6$. Das Komplement $\overline{G}$ hat $\frac{n(n-1)}{2} - k$ Kanten und gleich viele Knoten wie G. Annahme: $\overline{G}$ ist planar. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2} - k &\leq 3n - 6 \\
\Rightarrow \quad \frac{n(n-1)}{2} &\leq 3n - 6 + k \leq 2(3n - 6) \\
\Rightarrow \quad n^2 - n &\leq 12n - 24 \\
\Rightarrow \quad n^2 - 13n + 24 &\leq 0.
\end{aligned}$$

Die Nullstellen der quadratischen Funktion der rechten Seite sind

$$n_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{96}{4}} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{73}{4}} < \frac{13}{2} + \frac{9}{2} < 11.$$

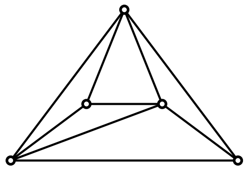
Folglich kann das Komplement von G für $n \geq 11$ nicht planar sein.

H83 (a) Geben Sie einen maximalen planaren Graphen mit 5 Knoten an, und begründen Sie, dass Ihr Graph die geforderten Eigenschaften besitzt.

(b) Zeigen Sie: Ein maximaler planarer Graph mit mindestens drei Knoten ist zweifach zusammenhängend.

Lösung:

(a) Ein solcher Graph ist, da er größer gleich 3 Knoten besitzt und eine Triangulierung, der folgende:



(b) Ein Graph ist zweifach zusammenhängend, falls er mindestens 3 Knoten hat, zusammenhängend ist und keine Gelenkpunkte besitzt.

Ein maximaler ebener Graph mit 5 Knoten ist eine Triangulierung, folglich ist er zusammenhängend, ansonsten gäbe es eine Fläche, die von mehr als 3 Knoten begrenzt wird. Jeder Knoten liegt auf einem Kreis mit 3 Knoten, kann also kein Gelenkpunkt sein.

Alternativ: Argumentation über eine Ohrenzerlegung.

H84 Aus einem gewöhnlichen Würfel konstruiere man einen Graphen wie folgt: Die Knoten des Graphen seien die Flächen des Würfels. Zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, falls die zugehörigen Würfelflächen zwei Würfelecken gemeinsam haben.

Zeichnen Sie ein ebenes Diagramm dieses Graphen. Wieviele Flächen hat es?

Lösung: Zeichnet man einen Würfel, kann man das zugehörige Polyeder leicht einzeichnen. Es ist das Oktaeder, das, wie der Name schon verrät, 8 Flächen hat.