Algebra für Informationssystemtechniker

Prof. Dr. Ulrike Baumann

Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

www.math.tu-dresden.de/$\sim$baumann

Ulrike.Baumann@tu-dresden.de

9.4.2018

Inhalt der Vorlesung

Wintersemester 2017/18

- Mengen und Graphen
- Restklassenringe

Sommersemester 2018

- Binäre Relationen
- Halbgruppen und Gruppen
- Ringe und Körper

8. Vorlesung

- Binäre Relationen und ihre Eigenschaften
- Äquivalenzrelationen
- Ordnungsrelationen

Binäre Relationen

- Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$. Dann wird R eine (binäre oder 2-stellige) **Relation** in A genannt.

  Spezielle Relationen:
  - $\Delta_A := \{(x, x) \mid x \in A\}$ heißt **Diagonale** in A (oder identische Relation)
  - $\nabla_A := A \times A$ heißt **Allrelation** auf A
- Statt $(x, y) \in R$ schreibt man auch xRy.
- Relationen sind auch durch Pfeildiagramme und Relationsmatrizen beschreibbar.
- $R^{-1} := (y, x) \mid (x, y) \in R$ heißt die zu R **inverse Relation**.

Eigenschaften von Relationen

Sei R eine Relation in A.

- R heißt **reflexiv**, falls $(x, x) \in R$ für alle $x \in A$ gilt.
- R heißt **irreflexiv**, falls $(x, x) \in R$ für kein $x \in A$ gilt.
- R heißt **symmetrisch**, wenn aus $(x, y) \in R$ auch $(y, x) \in R$ für alle $x, y \in A$ folgt.
- R heißt **antisymmetrisch**, wenn aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ folgt, dass $x = y$ gilt.
- R heißt **transitiv**, wenn aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ auch $(x, z) \in R$ für alle $x, y, z \in A$ folgt.

Äquivalenzrelationen

- Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt **Äquivalenzrelation** auf A, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Ist R eine Äquivalenzrelation auf A, so nennt man für $x \in A$

  $$x/R := \{y \mid (x, y) \in R\}$$

  die **Äquivalenzklasse** von x bezüglich R.

  Eine andere übliche Schreibweise für x/R ist $[x]_R$
- $A/R := \{x/R \mid x \in A\}$ heißt **Faktormenge** von A nach R.
- Die **kanonische Projektion** $\pi_R : A \to A/R : x \mapsto x/R$ ist die Abbildung, die jedes Element $x \in A$ auf die Äquivalenzklasse abbildet, in der es liegt.

Eigenschaften von Äquivalenzklassen

- Für je zwei Elemente $x, y \in A$ gilt entweder
$$x/R = y/R$$
oder
$$x/R \cap y/R = \emptyset,$$
d.h. Äquivalenzklassen sind disjunkt oder gleich.

- $A = \bigcup_{x \in A} x/R$,

  d.h. jedes Element aus A ist in einer Äquivalenzklasse nach R enthalten.

Partitionen

- Eine **Partition** einer Menge $A \neq \emptyset$ ist eine Menge $\mathcal{P}$ nichtleerer Teilmengen von A, die paarweise diskjunkt sind und deren Vereinigung gleich A ist.
- Man nennt die Elemente von $\mathcal{P}$ die **Klassen der Partition** $\mathcal{P}$.
- Eine Partition $\mathcal{P}$ der Menge $A \neq \emptyset$ ist eine Menge $\mathcal{P} := \{A_i \mid i \in I\}$ von Mengen A_i mit folgenden Eigenschaften:
  1. Jedes A_i enthält mindestens ein Element,
  2. alle Elemente der A_i sind auch Elemente von A,
  3. jedes Element von A kommt in genau einer der Mengen A_i vor.

Hautsatz über Äquivalenzrelationen

- Ist R eine Äquivalenzrelation auf der nichtleeren Menge A, dann ist die Faktormenge A/R eine Partition von A.

- Ist $\mathcal{P} := \{A_i \mid i \in I\}$ eine Partition der Menge A, dann ist

$$R_{\mathcal{P}} := \bigcup_{A_i \in \mathcal{P}} A_i \times A_i$$

eine Äquivalenzrelation.

Kongruenzrelationen in $\mathbb{Z}_n$

- Sei R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}_n$. Dann wird R eine Kongruenzrelation auf $\mathbb{Z}_n$ bezüglich der Multiplikation genannt, wenn für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_n$ gilt:

$$(a, b) \in R \text{ und } (c, d) \in R \implies (a \cdot c, b \cdot d) \in R$$

- Kongruenzrelationen sind *strukturverträgliche* Äquivalenzrelationen.

Eigenschaften von Äquivalenzrelationen

- Sind R und S Äquivalenzrelationen auf der Menge A, dann ist auch $R \cap S$ eine Äquivalenzrelation auf A.

- Sind R und S Äquivalenzrelationen auf der Menge A, dann ist $R \cup S$ im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation auf A.

  Die kleinste Äquivalenzrelation auf A (bezüglich $\subseteq$), die $R \cup S$ enthält, nennt man die **transitive** Hülle von $R \cup S$.

Ordnungsrelationen

- Eine Relation R in einer Menge A heißt **partielle Ordnung (Halbordnung)** auf A, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

  Partielle Ordnungen lassen sich durch Hasse-Diagramme veranschaulichen.

- Eine Relation R in einer Menge A heißt **strikte Halbordnung** auf A, wenn R irreflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- Eine partielle Ordnung R in A heißt **lineare Ordnung (totale Ordnung)** auf A, wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt:

  $$xRy \text{ oder } yRx \text{ oder } x = y$$

  (Bei linearen Ordnung gibt es keine **unvergleichbaren Elemente**.)