**Bereich Mathematik und Naturwissenschaften** Fakultät Mathematik, Institut für Algebra
Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig
Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

# 2. Übungsblatt für die Übungen vom 15.10.-19.10.2018

## *Mengen und Abbildungen*

V2.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$\begin{array}{rclrcl} A &=& \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, & B &=& \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 5\}, \\ C &=& \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \{0,1,2\} :\ x = 2^k\}, & D &=& \{x \in \mathbb{N} \mid \mid x-2 \mid \leq 1\}, \\ E &=& \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ein Teiler von } 30\}, & F &=& \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 = 13\}, \\ G &=& F \cap C, & H &=& A \cup B \cup E, \\ K &=& B \setminus A, & L &=& A \setminus B. \end{array}$$

(a) Schreiben Sie die Mengen elementweise auf.

(b) Zeichnen Sie ein Mengen-Diagramm der Menge $\{A, B, C, D\}$.

(c) Geben Sie alle Teilmengenbeziehungen zwischen den Mengen an.

Ü2.2 (a) Überprüfen Sie für die folgenden Gleichungen, ob sie für beliebige Mengen $A$, $B$, $C$ richtig oder falsch sind. Geben Sie dazu einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,

(ii) $(A \cup B) \setminus B = (A \setminus B) \cup B$,

(iii) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

(b) Bestimmen Sie für die Menge $M$=$\{$Apfel,Birne,Pflaume$\}$ die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$. Wie sieht $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$ aus? Und $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset)))$?

Ü2.3 Beschreiben Sie die folgenden Abbildungen in einer geeigneten Weise (Wertetabelle, Aufzeichnen im Koordinatensystem, ...). Untersuchen Sie, ob die Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(a) $f_a : \{0, 1, \ldots, 9\} \to \{0, 1, \ldots, 9\}$, $\quad f_a(m) = n :\iff n$ ist die letzte Ziffer von $a \cdot m$ (für $a = 2$, $a = 3$ und $a = 4$),

(b) $g_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\quad g_a(z) := a^z$ (für beliebiges $a \in \mathbb{N}$),

(c) $h_1 : X \to \mathfrak{P}(X)$, $\quad h_1(x) = \{x\}$ (für eine beliebige Menge $X$),

(d) $h_2 : X \to \mathfrak{P}(X)$, $\quad h_2(x) = X \setminus \{x\}$,

(e) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad h(x) = \sin(x)$,

(f) $m_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad m_{a,b}(x) = x^2 + ax + b$. (für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$)

(g) $l : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $\quad l(x, y) = (x + y, x - y)$

Ü2.4 Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen Sie:

(a) Sind $f$ und $g$ injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind $f$ und $g$ surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist $g$ surjektiv.

(d) Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist $f$ injektiv.

Widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel): Ist $g \circ f$ bijektiv, dann sind $f$ und $g$ bijektiv.

A2.5 **Hausaufgabe, bitte bis zum 19.10.2018 (Gruppen 1 bis 3) bzw. bis zum 22.10.2018 (Gruppen 4 und 5), 9:30 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) (i) Geben Sie Beispiele von Mengen $W$, $X$, $Y$, $Z$ an, für welche die Gleichung $(W \setminus X) \cup (Y \setminus Z) = (W \cup Y) \setminus (X \cup Z)$ verletzt ist.

(ii) Beweisen Sie, dass die Inklusion $(W \cup Y) \setminus (X \cup Z) \subseteq (W \setminus X) \cup (Y \setminus Z)$ stets richtig ist. Argumentieren Sie sorgfältig!

(b) Für zwei Parameter $a, b \in \mathbb{N}$ sei durch $f_{a,b}(x) := ax + b$ eine Funktion $f_{a,b} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ erklärt. Untersuchen Sie, für welche Werte von $a$ und $b$ die Funktion $f_{a,b}$ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist.

H2.6 Über zwei Mengen $A$ und $B$ ist folgendes bekannt:

(i) $A \cup B = \{x^2 + y \mid x \in \{0, 1, 2\}, y \in \{0, 1, 2\}\}$

(ii) $|A| = |B| + 3$

(iii) $|A \cap B| = 2$

(iv) $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid n \text{ ist gerade}\}$

Dadurch sind die Mengen $A$ und $B$ jedoch noch nicht eindeutig festgelegt.

(1) Geben Sie alle möglichen Mengen $B$ elementweise an, die obige vier Bedingungen erfüllen.

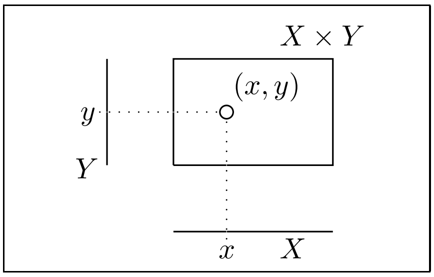
(2) Wie viele Mengenpaare $A$,$B$ gibt es, die obige Bedingungen erfüllen?

Hinweis: Sie dürfen zur Lösung dieser Aufgabe die Gleichung $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ nutzen.

H2.7 Das kartesische Produkt

$$X \times Y := \{(a, b) \mid a \in X \text{ und } b \in Y\}$$

zweier Mengen $X$ und $Y$ und deren Elemente $(x, y) \in X \times Y$ sollen wie in der Skizze dargestellt werden („Koordinatendarstellung“). Damit kann der Graph $\Gamma_f := \{(x, y) \subseteq X \times Y \mid y = f(x)\}$ einer Abbildung $f : X \to Y$ skizziert werden.




Zeichnen Sie Diagramme von Graphen von Abbildungen $f$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f$ surjektiv, aber nicht injektiv,

(ii) $f$ injektiv, aber nicht surjektiv,

(iii) $f$ bijektiv,

(iv) $f$ konstant,

(v) $f$ nicht surjektiv und nicht injektiv,

(vi) $X = Y$ und $f = \mathrm{id}_X$,

(vii) $\mathrm{Im}(f) := \{f(x) \mid x \in X\}$ besteht aus genau zwei Elementen.

H2.8 (a) Es sei $\mathbb{S} := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} : m^2 = n\}$ die Menge der Quadratzahlen. Weiter seien

$$g : \mathbb{N} \cup \{-1\} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1 \qquad \text{und} \qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{S}, \quad x \mapsto x^2$$

Abbildungen. Bestimmen Sie, falls möglich (dazu müssen Sie prüfen, ob die Funktionen bijektiv sind), die Abbildungen $(f \circ g)^{-1}$ und $g^{-1} \circ f^{-1}$.

(b) Es seien $g : A \to B$ und $f : B \to C$ bijektive Funktionen. Beweisen Sie:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$