Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

3. Übungsblatt für die Übungen vom 22.10.-26.10.2018

Gruppen und Körper

V3.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Stellen Sie für $n \in \{5, 6, 7\}$ die Tafeln für Addition $x + y := (x + y \mod n)$ und Multiplikation $x \cdot y := (x \cdot y \mod n)$ in $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ auf. Begründen Sie (ohne detaillierten Beweis), dass $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ für $n \in \{5, 7\}$ jeweils die Körpereigenschaften erfüllt.
Warum trifft das für $n = 6$ nicht zu?

Ü3.2 (a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Paare Gruppen sind.

(i) $(\mathbb{N}, \circ)$ mit $x \circ y := x \cdot y + y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$.

(ii) $(2\mathbb{Z}, \cdot)$, dabei ist $2\mathbb{Z}$ die Menge der geraden ganzen Zahlen.

(iii) $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \circ)$ mit $x \circ y := x \cdot |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

(iv) $(\mathbb{Z}, *)$ mit $x * y := x + y + 2$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

(v) $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$ mit $x * y := xy + x + y$.
Wie lauten die Inversen von $\frac{1}{2}$ und von $\frac{3}{4}$?

(b) Zeigen Sie: $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

Ü3.3 Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Mit 0 bzw. 1 seien die neutralen Elemente von Addition bzw. Multiplikation in K bezeichnet. Beweisen Sie:

(a) $\forall x \in K : 0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$

(b) $\forall x \in K : (-1) \cdot x = -x = x \cdot (-1)$

(c) $(-1) \cdot (-1) = 1$

(d) $\forall x, y \in K : (-x) \cdot y = -(xy) = x \cdot (-y)$

(e) $\forall x, y \in K : (-x) \cdot (-y) = xy$

(f) $\forall x \in K : -(-x) = x$

Ü3.4 (a) Es sei X eine endliche Menge der Mächtigkeit $|X| = n$. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ mit der symmetrischen Differenz $\triangle$ (für zwei Mengen A und B definiert durch $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$) als Verknüpfung eine abelsche Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Gruppentafel, dass die Menge $E_4 := \{1, i, -1, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ zusammen mit der Multiplikation in $\mathbb{C}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ bildet. Geben Sie zu jedem Element sein Inverses an.

A3.5 **Hausaufgabe, bitte bis zum 26.10.2018 (Gruppen 1 bis 3) bzw. bis zum 29.10.2018 (Gruppen 4 und 5), 9:30 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Namen, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) In der speziellen Relativitätstheorie beschreibt das *relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten* die Addition $\oplus$ von Unterlichtgeschwindigkeiten $u, v \in (-c, c] =: C$ (dabei ist $c > 0$ die Lichtgeschwindigkeit) durch

$$\oplus : C \times C \to C, \qquad u \oplus v := \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

Überprüfen Sie, welche Eigenschaften einer Gruppe die Struktur $\mathbf{C} := (C, \oplus)$ erfüllt. Finden Sie eine Teilmenge $U \subseteq C$, die mindestens 2 Elemente besitzt und eine Gruppe ist?

(b) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und $a, b \in G$ beliebig. Das Inverse von a sei a^{-1}.
Beweisen Sie: Es gibt ein Element $x \in G$, so dass $a * x = b$ gilt.
Weiter sei $a^n := \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n\text{-mal}}$ das n-fache Produkt von a mit sich selbst (bzw. die n-te Potenz von a) in G. Beweisen Sie: $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.

H3.6 Es sei M eine Menge. Beweisen Sie: Die Menge $\mathrm{Bij}(M, M)$ der bijektiven Abbildungen von M auf sich bildet mit der Komposition als Operation eine Gruppe.

H3.7 (a) Zeigen Sie, dass die Menge der Gauß'schen Zahlen $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit der üblichen Addition eine Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$ bildet.

(b) Finden Sie einige Untergruppen von $(\mathbb{Z}[i], +)$.

(c) Ist $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ ein Körper?

H3.8 Prüfen Sie, ob die folgende Menge mit den angegebenen zwei Operationen ein Ring oder sogar ein Körper ist:

$$(\mathbb{Z}, \oplus, \odot) \text{ mit } a \oplus b := a + b - 1, \quad a \odot b := a + b - ab.$$