TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

4. Übungsblatt für die Übungen vom 29.10.-2.11.2018

Vektorräume

V4.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Sind die folgenden Teilmengen Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie ihre Antwort jeweils. Skizzieren Sie die angegebenen Mengen.

(i)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y \geq 0\}$,	(ii)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$,
(iii)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$,	(iv)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$,
(v)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$,	(vi)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$.

Ü4.2 Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen in einem Vektorraum V über K für alle $\lambda \in K$ und alle Vektoren $u \in V$ gelten:

(a) $\lambda \cdot u = 0 \iff \lambda = 0 \ \vee \ u = 0$,

(b) $(-1) \cdot u = -u$. Hinweis: Was muss hier überhaupt bewiesen werden?

Ü4.3 Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume sind:

(a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = 2c\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(b) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

(c) $\{(a+b, b^2) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

(d) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(e) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

(f) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ü4.4 Es sei V ein K-Vektorraum und $B = (a_1, \ldots, a_n)$ ein System von Vektoren aus V. Zeigen Sie (vgl. Satz 1/6/5) die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) B ist eine Basis,

(b) B ist ein maximales linear unabhängiges System,

(c) B ist ein minimales Erzeugendensystem.

A4.5 **Hausaufgabe, bitte bis zum 2.11.2018 (Gruppen 1 bis 3) bzw. bis zum 5.11.2018 (Gruppen 4 und 5), 9:30 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Namen, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume sind:

(a) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ ist injektiv}\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

(b) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ ist surjektiv}\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

(c) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(2) = 0\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

H4.6 (a) Sei A eine Menge. Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{P}(A), \triangle, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ ist. Dabei sei die Vektorraumaddition durch die symmetrische Differenz $\triangle$ und die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{Z}_2$ durch $0 \cdot X := \emptyset$ und $1 \cdot X := X$ gegeben.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage: Für jede Teilmenge $B \subseteq A$ ist $\mathfrak{P}(B)$ ein Untervektorraum von $\mathfrak{P}(A)$.

H4.7 Zeigen Sie: Ist X ein Menge und W ein K-Vektorraum, so wird die Menge der Abbildungen $V = \mathrm{Abb}(X, W)$ durch punktweise definierte Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und Skalarmultiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

zu einem K-Vektorraum.

H4.8 Analysieren Sie die beiden folgenden Behauptungen und ihre Beweise. Finden Sie den grundsätzlichen Fehler im Aufbau des ersten „Beweises“. Warum ist der zweite Beweis im Gegensatz zum ersten tatsächlich beweiskräftig?

<u>1. Behauptung:</u> Es gilt $1 = 2$.

<u>Beweis:</u> Es sei

$$1 = 2.$$

Wir subtrahieren $3/2$ auf beiden Seiten und erhalten

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Nun quadrieren wir auf beiden Seiten:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Dies ist eine wahre Aussage, damit ist die Behauptung richtig.

<u>2. Behauptung:</u> Für jede natürliche Zahl a gilt: $4|a \implies 4|a^2$.

<u>Beweis:</u> Nach Voraussetzung existiert eine natürliche Zahl b mit $4 \cdot b = a$.

Nun quadrieren wir auf beiden Seiten: $(4b)^2 = a^2$.

Wir klammern links eine 4 aus, also $4 \cdot 4b^2 = a^2$.

Da $4b^2$ wieder eine natürliche Zahl ist, folgt die Behauptung $4|a^2$.