Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

5. Übungsblatt für die Übungen vom 5.11.-9.11.2018

lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

V5.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Es sei V ein K-Vektorraum und $(b_1, \ldots, b_n)$ ein System von Vektoren aus V. Beweisen Sie: Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ linear unabhängig und $x \in V \setminus \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, dann ist $(b_1, \ldots, b_n, x)$ linear unabhängig.

Hinweis: Untersuchen Sie, welche $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ die Gleichung $0 = \lambda x + \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$ erfüllen.

Ü5.2 (a) Welche der folgenden Tupel von Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig? Geben Sie im Fall linearer Abhängigkeit eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors an (ggf. in Abhängigkeit von den Werten $a, b, c \in \mathbb{R}$).

(a1) $((2,0),(1,1),(0,2))$, (a2) $((1,1,0),(2,0,2),(0,2,3))$,
(a3) $((1,b),(c,1))$, (a4) $((2,-1,1,1),(-3,2,-1,-3),(1,1,2,a))$.

(b) Die Vektoren a, b, c aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum seien linear unabhängig. Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel von Vektoren ebenfalls linear unabhängig sind.

(b1) $(-a, a+b+b)$, (b2) $(a-b, b+c, b-c)$,
(b3) $(a-b, a-c, b-c)$.

Ü5.3 Untersuchen Sie die untenstehenden Teilmengen U_i der K_i-Vektorräume V_i in folgender Weise:

- Prüfen Sie, ob U_i ein Unterraum von V_i ist.
- Geben Sie ggf. eine Basis B_i von U_i an und bestimmen Sie $\dim(U_i)$.
- Vervollständigen Sie ggf. B_i zu einer Basis von V_i.

(a) $K_1 = \mathbb{R}$, $V_1 = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -3x_1\}$,
(b) $K_2 = \mathbb{C}$, $V_2 = \mathbb{C}^3$, $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_3 = i \cdot x_1\}$,
(c) $K_3 = \mathbb{R}$, $V_3 = \mathbb{R}^4$, $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
(d) $K_4 = \mathbb{R}$, $V_4 = \mathbb{R}^3$, $U_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 + 1, x_2 = x_1^2\}$.

Ü5.4 Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen von Polynomfunktionen Unterräume von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind. Dabei werden die aus der Schule bekannte Addition bzw. Skalarmultiplikation als Operationen verwendet. Geben Sie ggf. eine Basis an und bestimmen Sie die Dimension:

(a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \,|\, p_i \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{R}[X]_{n+1}$,
(b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \in \mathbb{R}[X]_{n+1} \,\big|\, \sum_{i=0}^{n} p_i = 0\}$.

Hinweis: Unter $\mathbb{R}[X]_{n+1}$ verstehen wir hier also die Menge aller Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$.

A5.5 **Hausaufgabe, bitte bis zum 9.11.2018 (Gruppen 1 bis 3) bzw. bis zum 12.11.2018 (Gruppen 4 und 5), 9:30 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Namen, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Die Ziffern Ihrer 7-stelligen Immatrikulationsnummer seien (von links nach rechts gelesen) die Zahlen $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$.
Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$(x_1, x_2, x_3), (x_4, a, x_5), (x_6, x_7, a) \in \mathbb{R}^3$$

linear abhängig bzw. linear unabhängig sind.
Machen Sie die Probe! (Nur dafür dürfen Sie einen Taschenrechner benutzen.)

(b) Beweisen Sie: Ist V ein K-Vektorraum der Dimension 2, dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$(v, w) \text{ ist linear unabhängig} \implies (v + w, -w) \text{ ist eine Basis von } V.$$

H5.6 Es seien $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen richtig sind. Geben Sie je einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Gilt $v_4 = 3v_2 - v_3$, dann ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear abhängig.

(b) Gilt $v_3 = 0$, dann ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear abhängig.

(c) Ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig, dann ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear abhängig.

(d) Ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear unabhängig, dann ist (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig.

(e) Ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear abhängig, dann ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig.

(f) Ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig, dann ist jeder Vektor v_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ Linearkombination der anderen Vektoren aus (v_1, v_2, v_3).

H5.7 (a) Wann sind zwei Vektoren $X, Y \in \mathfrak{P}(A)$ linear abhängig im $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $\mathfrak{P}(A)$ (siehe Aufgabe H4.6)?

(b) Es seien $X, Y \in \mathfrak{P}(A)$. Geben Sie alle Elemente von $\langle X, Y \rangle$ an. Welche Mächtigkeit hat $\langle X, Y \rangle$ in Abhängigkeit von X und Y?

H5.8 (a) Wann besitzt ein Vektorraum genau eine Basis?

(b) Es seien K ein Körper und (v_1, v_2, v_3) eine Basis des K-Vektorraums V. Weiter sei $w = v_1 + v_2$. Geben Sie alle Basen an, die nur Elemente aus $\{v_1, v_2, v_3, w\}$ enthalten.

(c) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $B = (x_i)_{i \in I}$. Geben Sie eine Basis von V an, wenn V als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst wird.