TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

6. Übungsblatt für die Übungen vom 12.11.-16.11.2018

lineare Abbildungen

V6.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f\left(\binom{1}{3}\right) = \binom{3}{1}$ und $f\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{1}{2}$.

(a) Warum ist durch diese Festlegung die (lineare!) Abbildung f festgelegt?

(b) Bestimmen Sie $f\left(\binom{2}{6}\right)$, $f\left(\binom{0}{3}\right)$ und $f\left(\binom{2}{7}\right)$.

(c) Bestimmen Sie Kern und Bild von f.

Ü6.2 Beweisen Sie Korollar 1/6/13:

Ist V ein K-Vektorraum und U ein Unterraum von V, dann gilt $\dim_K(U) \leq \dim_K(V)$. Gilt sogar $\dim_K(U) = \dim_K(V) < \infty$, dann folgt $U = V$.

Ü6.3 Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen f_i auf den gegebenen K-Vektorräumen K-linear sind:

(a) $K = \mathbb{R}$, $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_0(x) := m\,x + n$ (für beliebige, aber fest gewählte $m, n \in \mathbb{R}$),

(b) K, V beliebig, $f_1 : V \times V \to V$ mit $f_1(x_1, x_2) := x_1$,

(c) $K = \mathbb{C}$, $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ mit $f_2(x) := (x - 2, x + 1)$,

(d) $K = \mathbb{R}$, $f_3 : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f_3(g) := g(1)$,

(e) $K = \mathbb{Q}$, $f_4 : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ mit $f_4(x_1, x_2, x_3) := (2x_1 + 2x_2, 3x_2 - 2x_3, 2x_3 - x_1)$,

(f) K beliebig, $f_5 : K \to K$ mit $f_5(x) := x^2$.

Ü6.4 Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 2x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie $\dim\ker(f)$ und $\dim\mathrm{im}(f)$ und entscheiden Sie, ob f injektiv oder surjektiv ist.

(c) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{im}(f)$ an und bestimmen Sie $\ker f$.

A6.5 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Namen und Matrikelnr.) bis 19.11.2018, 12:00 Uhr**

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das System $M := (v_1, v_2, v_3)$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a+1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

(b) Es sei $B := \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (für $a \in \mathbb{R}$) lineare Abbildungen mit $f_a(e_i) = v_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Warum sind die Abbildungen f_a durch diese Festlegung eindeutig bestimmt? Bestimmen Sie $\ker(f_0)$, $\ker(f_1)$ und $\ker(f_2)$.

(c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f_a surjektiv? Begründen Sie!

H6.6 Die Menge $\mathbb{R}[X]_3$ aller Polynome vom Grad höchstens 2 bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum (siehe Ü5.5). Zeigen Sie, dass der Ableitungsoperator $' : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_2$ mit $ax^2+bx+c \mapsto 2ax+b$ eine lineare Abbildung ist. Bestimmen Sie Kern und Bild!

H6.7 (a) Ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) := (x, x)$ $\mathbb{R}$-linear? Beweisen Sie!

(b) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : K \to K$ genau dann K-linear ist, wenn es ein $\lambda \in K$ mit $\forall v \in K : f(v) = \lambda \cdot v$ gibt.

H6.8 Es seien V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$v \sim w \;:\Longleftrightarrow\; v - w \in U$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf V definiert wird.

(b) Es sei $[v]$ die Äquivalenzklasse von v bezüglich $\sim$. Zeigen Sie, dass $[v] = v + U$ gilt.

(c) Es sei $V/U := \{[v] \mid v \in V\}$ die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$. Wir definieren auf V/U eine Addition und eine Multiplikation mit Elementen aus K durch $[v]+[w] := [v + w]$ und $k[v] := [kv]$ für beliebige $v, w \in V$, $k \in K$.

Zeigen Sie, dass die Operationen wohldefiniert sind und dass V/U mit diesen Operationen ein K-Vektorraum ist, der sogenannte *Quotienten-* oder *Faktorraum*.

(d) Beweisen Sie, dass die Abbildung $\pi : V \to V/U$, $v \mapsto [v]$ ein Epimorphismus von K-Vektorräumen ist.