Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

7. Übungsblatt für die Übungen vom 19.11.-23.11.2018

Matrizen und lineare Abbildungen

V7.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Gegeben seien die folgenden Matrizen (über dem Körper $\mathbb{R}$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte mit zwei Faktoren.

(b) Beweisen Sie (durch ein Gegenbeispiel): Die Matrixmultiplikation ist im K-Vektorraum $K^{n\times n}$ (für einen Körper K und $n \geq 2$) nicht kommutativ.

(c) Gibt es in $K^{n\times n}$ Matrizen mit $A, B \neq 0$ und $A \cdot B = 0$?

Ü7.2 Beweisen Sie: Seien A, B, C Matrizen über demselben Körper K, so dass die untenstehenden Summen und Produkte jeweils definiert sind. Dann gelten:

(a) Die Einheitsmatrizen $E_n \in K^{n\times n}$ sind neutrale Elemente der Multiplikation in $K^{n\times n}$,

(b) Distributivität: $A(B + C) = AB + AC$ und $(A + B)C = AC + BC$,

(c)* Assoziativität: $(AB)C = A(BC)$.

Ü7.3 Die Drehung $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der euklidischen Ebene (d.h. $\mathbb{R}^2$) um den Koordinatenursprung um einen Winkel α ist eine lineare Abbildung. Man kann sich die Abbildung f_α so vorstellen, dass zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ der Punkt $f_\alpha(x)$ entsteht, indem man x gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung um den Winkel α dreht.

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix $A = M^{B_2}_{B_2}(f_\alpha)$ von f_α bezüglich der Standardbasis B_2 von $\mathbb{R}^2$ an. Bestimmen Sie die Inverse A^{-1}.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix einer Abbildung, die eine Drehung um 45° bewirkt. Berechnen Sie die Bilder der Punkte $(1, 0), (3, 0), (1, 2), (3, 2), (2, 3)$ und überzeugen Sie sich mit einer Skizze von der Richtigkeit Ihrer Rechnung.

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass $M^{B_2}_{B_2}(f_\alpha) \cdot M^{B_2}_{B_2}(f_\beta) = M^{B_2}_{B_2}(f_{\alpha+\beta})$ gilt, d.h. dass die Hintereinanderausführung (vgl. Satz 2/2/4) einer Drehung um α und einer Drehung um β eine Drehung um $\alpha + \beta$ ist.

Ü7.4 Es sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W.

(a) Zeigen Sie: Das Bild $\varphi(g)$ einer Geraden $g \subseteq V$ ist wieder eine Gerade oder ein Punkt.
Hinweis: Mit $\varphi(g) := \{\varphi(x) | x \in g\}$ bezeichnen wir die Menge der Bilder der Elemente von g.

(b) Zwei Geraden $g := a_1 + U_1$ und $h := a_2 + U_2$ in V (vgl. Bemerkung 2/1/12) heißen *parallel* (wir schreiben $g \parallel h$), wenn für die Unterräume gilt: $U_1 = U_2$.
Zeigen Sie: φ erhält Parallelität, d.h. sind $g, h \subseteq V$ Geraden in V und $\varphi(g), \varphi(h) \subseteq W$ Geraden in W, dann folgt aus $g \parallel h$, dass $\varphi(g) \parallel \varphi(h)$ gilt.

A7.5 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Namen und Matrikelnr.) bis 26.11.2018, 12:00 Uhr**

(a) (i) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in K^{2\times 2}$ genau dann mit allen Matrizen $C \in K^{2\times 2}$ kommutiert (d.h. es gilt $AC = CA$), wenn $A = kE_2$ für ein $k \in K$ gilt.

Hinweis: Multiplizieren Sie dazu z.B. A nacheinander von links und von rechts mit allen Elementen der Basis B von $K^{2\times 2}$, siehe VL nach 2/2/1.

(ii) **Zusatzaufgabe - wird nicht bewertet**

Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ genau dann mit allen Matrizen $C \in K^{n\times n}$ kommutiert, wenn $A = kE_n$ (für ein $k \in K$) gilt.

(b) Die Ziffern Ihrer 7-stelligen Immatrikulationsnummer seien (von links nach rechts gelesen) die Zahlen $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$.

Es seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare Abbildungen mit $f(1,0) = (x_1, x_7)$, $f(0,1) = (x_2, x_6)$, $g(1,0) = (x_3, x_5)$, $g(0,1) = (x_4, x_4)$.

(i) Warum sind f und g dadurch eindeutig festgelegt? Ist $f \circ g$ ebenfalls eine lineare Abbildung?

Hinweis: Begründen Sie mit Hilfe geeigneter Aussagen aus der Vorlesung.

(ii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $M^{B_2}_{B_2}(f)$, $M^{B_2}_{B_2}(g)$ und $M^{B_2}_{B_2}(f \circ g)$.

(iii) Ist die lineare Abbildung $f \circ g$ injektiv, surjektiv, bijektiv?

(iv) Bestimmen Sie das Bild des Quadrats mit den Eckpunkten $(1,0), (2,0), (1,1), (2,1)$ unter $f \circ g$.

(v) Bestimmen Sie das Urbild des Quadrats mit den Eckpunkten $(1,0), (2,0), (1,1), (2,1)$ unter $f \circ g$.

Veranschaulichen Sie die Abbildungen in einem Koordinatensystem.

H7.6 (a) Es sei K ein Körper. Welche der folgenden Rechenregeln gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{n\times n}$? Geben Sie jeweils einen Beweis an oder finden Sie ein Gegenbeispiel:

(i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

(ii) $A^2 + B^2 = 0 \;\Rightarrow\; A = B = 0$,

(iii) $BA = 0 \;\Rightarrow\; (AB)^2 = 0$.

(b) Es seien K ein Körper, $m, n, r \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{m\times r}$, $B \in K^{r\times n}$ (das Matrixprodukt AB ist also definiert).

(i) Die dritte Spalte von B sei gleich der Summe der beiden ersten Spalten. Was lässt sich über die dritte Spalte von AB sagen? Warum?

(ii) Die zweite Spalte von B bestehe nur aus Nullen. Was lässt sich über die zweite Spalte von AB sagen? Warum?

H7.7 Beweisen Sie:

Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $A \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(a) A ist ein affiner Unterraum (vgl. Definition 2/1/11).

(b) Es existiert ein K-Vektorraum V' und eine K-lineare Abbildung $f : V \to V'$, so dass A eine *Faser* von f ist, d.h. es existiert ein $v' \in V'$ mit $f^{-1}(v') = A$.

(c) Für jeweils endlich viele Elemente $a_0, \dots, a_r \in A$ und Koeffizienten $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$ folgt $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i \in A$.

Hinweis: Sie können die Resultate aus Aufgabe H6.8 nutzen.