

8. Übungsblatt für die Übungen vom 26.11.-30.11.2018

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

V8.1 Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.

Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrizen zu den folgenden linearen Gleichungssystemen über dem Körper \mathbb{R} . Bestimmen Sie die Lösungsmengen jeweils mit dem Gauß-Algorithmus, wie Sie ihn in der Vorlesung kennengelernt haben. Geben Sie jede Lösungsmenge als affinen Unterraum, also in der Form $w + W$ (mit $w \in \mathbb{R}^n$ und geeignetem Untervektorraum W von \mathbb{R}^n für passendes n) an. Machen Sie eine Probe!

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & 2x_1 - x_2 = 3 & \text{(ii)} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11 & \text{(iii)} \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1 + x_2 = 9 & x_1 + x_2 + x_3 = 4 & 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ & & x_2 + 2x_3 = 7 & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -3 \end{array}$$

Ü8.2 (a) Zeigen Sie, dass jede Matrix höchstens eine Inverse hat.

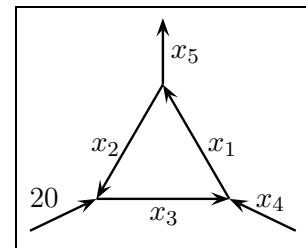
(b) Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Matrix A gilt: $(A^{-1})^{-1} = A$.

(c) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. Geben Sie die inverse Matrix A^{-1} an.

Ü8.3 Ermitteln Sie die Verkehrsströme in dem skizzierten „Kreisverkehr“.

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge.

(b) Benutzen Sie die Lösung aus (a), um herauszufinden, wie viele Fahrzeuge mindestens im Kreisverkehr unterwegs sind, d.h. bestimmen Sie eine nichtnegative Lösung, so dass $x_1 + x_2 + x_3$ minimal wird.



Ü8.4 (a) Es sei K ein beliebiger Körper mit Null- und Einselement 0 bzw. 1. Für welche $a \in K$ ist die folgende Matrix $A \in K^{3 \times 3}$ invertierbar? Geben Sie die Inverse an.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit von dem Parameter $r \in K$ (und von $a \in K$). Führen Sie die Probe durch!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es ist hilfreich, bei der Inversen A^{-1} den Faktor $(a(a-1))^{-1}$ auszuklammern.

A8.5 Hausaufgabe, Abgabe (mit Namen und Matrikelnr.) bis 3.12.2018, 12:00 Uhr

(a) Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie alle Werte für $a, b \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem $Ax = u$

- (i) keine Lösung,
- (ii) genau eine Lösung,
- (iii) mehrere Lösungen

hat. Geben Sie die Lösungsmengen von (ii) und (iii) als affinen Unterraum, also in der Form $L_{A,u} = w + W$ (mit $w \in \mathbb{R}^3$ und geeignetem Untervektorraum W von \mathbb{R}^3) an.

- (b) Untersuchen Sie, ob die Lösungsmenge im Fall (iii) (mehrere Lösungen) einen Untervektorraum von \mathbb{R}^3 bildet.
- (c) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch die Vorschrift $f : x \mapsto Ax$ festgelegt. Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist f injektiv?

H8.6 In einer demographischen Studie wurde festgestellt, dass in jedem Jahr 3% aller Bewohner von Musterstadt in das Umland ziehen, während 5% der Bewohner des Umlands nach Musterstadt ziehen. Im Jahr 2000 wohnten 200.000 Menschen in Musterstadt und 100.000 Menschen im Umland. Wie viele Personen bewohnten Musterstadt und sein Umland im Jahr

- (a) 2001, (b) 2010, (c) 1999, (d) 1990?

Hinweise: Um das Modell einfach zu halten, wurden Geburten, Todesfälle und sonstige Migration ignoriert. Stellen Sie zur Modellierung ein lineares Gleichungssystem auf. Benutzen Sie die in der Lehrveranstaltung behandelten Methoden zur Lösung. Sie dürfen ausnahmsweise elektronische Hilfsmittel verwenden.

H8.7 Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und

$$\Delta_n := \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in K\} \subseteq K^{n \times n}$$

die Menge aller n -reihigen Diagonalmatrizen über K . Weiter seien $+$ und \cdot die Addition bzw. Multiplikation im Ring $K^{n \times n}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $(\Delta_n, +)$ eine abelsche Gruppe ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $\forall A, B \in \Delta_n : AB \in \Delta_n$ gilt, d.h. dass das Produkt zweier Diagonalmatrizen wieder eine Diagonalmatrix ist.
- (c) Ist $(\Delta_n, +, \cdot)$ ein Ring bzw. ein Körper? Begründen Sie!
- (d) Finden Sie (für jedes $n \in \mathbb{N}$) eine Menge $\tilde{\Delta}_n \subsetneq \Delta_n$, so dass $(\tilde{\Delta}_n, \cdot)$ eine Gruppe ist.
- (e) Finden Sie einen Gruppenisomorphismus $\varphi : (\Delta_n, +) \rightarrow (K^n, +)$.