TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

9. Übungsblatt für die Übungen vom 3.12.-7.12.2018

Koordinatenvektoren, Basiswechsel, transponierte Matrizen

V9.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) In der Anschauungsebene $\mathbb{R}^2$ seien die beiden Basen $B = ((1,1)^T, (-1,1)^T)$ und $C = ((2,1)^T, (-1,2)^T)$ gegeben. Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M_C^B(\mathrm{id})$ und $M_B^C(\mathrm{id})$.

(b) Die drei Elemente $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind die Eckpunkte eines Dreiecks D in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren von x, y, z bzgl. der Basis C.

(c) Visualisieren Sie die Ergebnisse aus (b), in dem Sie sie in ein Koordinatensystem bzgl. der Standardbasis B_2 des $\mathbb{R}^2$ eintragen.

Ü9.2 Es seien K ein Körper und $m, n, r \in \mathbb{N}$.

(a) Beweisen Sie: $\forall A, B \in K^{m\times n} : (A+B)^T = A^T + B^T$.

(b) Beweisen Sie: $\forall A \in K^{r\times m} \forall B \in K^{m\times n} : (AB)^T = B^T A^T$.

(c) Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Matrix A die Beziehung $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ gilt.

Ü9.3 Die Tupel $E := \mathcal{B}_3 = ((1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T)$ und $H = ((1,1,1)^T, (1,2,1)^T, (1,1,2)^T)$ sind Basen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$, $F := \mathcal{B}_2 = ((1,0)^T, (0,1)^T)$ und $G = ((1,1)^T, (1,3)^T)$ sind Basen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen M_H^E und M_E^H und überprüfen Sie, dass diese Matrizen zueinander invers sind.

(b) Berechnen Sie für die durch $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)$ gegebene lineare Abbildung f die Darstellungsmatrizen $M_F^E(f)$, $M_G^E(f)$, $M_F^H(f)$ und $M_G^H(f)$.

(c) Verifizieren Sie, dass durch jede der darstellenden Matrizen aus (b) tatsächlich der Vektor $(10,9,8)^T$ auf den Vektor $(19,17)^T$ abgebildet wird.

Ü9.4 (a) Bestimmen Sie alle invertierbaren Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$, für die $A^{-1} = A$ gilt.

(b) Bestimmen Sie alle invertierbaren Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$, für die $A^{-1} = A^T$ gilt.

Hinweis: Solche Matrizen heißen auch orthogonale Matrizen.

A9.5 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Namen und Matrikelnr.) bis 10.12.2018, 12:00 Uhr**

(a) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und E die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Weiter seien $B = (b_1, b_2, b_3)$ sowie $C = (c_1, c_2, c_3)$ zwei Basen von V mit

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ c_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen M_E^B, M_B^C und M_C^B.

(b) Ein Endomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die darstellende Matrix

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_C^C(f)$.

(c) Bestimmen Sie für untenstehenden Vektor u den Koordinatenvektor u_B bzgl. B und berechnen Sie dessen Bild $(f(u))_B$ unter f:

$$u = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

H9.6 (a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\2 & 7 & 4\\1 & 4 & a\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

invertierbar ist. Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von A für $a = 4$.

(b) Es sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Verifizieren Sie, dass auch $C = (w_1, w_2, w_3)$ mit

$$w_1 = v_1 + 2v_2 + v_3, \qquad w_2 = 3v_1 + 7v_2 + 4v_3, \qquad w_3 = -v_1 + 4v_2 + 4v_3$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen M_C^B und M_B^C.

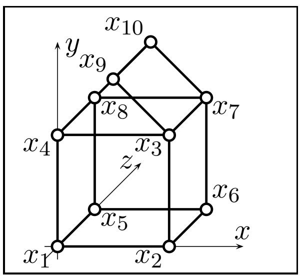
(d) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, für die $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, f(v_3) = v_1$ gilt. Begründen Sie, dass f durch diese Festlegung eindeutig bestimmt ist. Geben Sie die darstellenden Matrizen $M_C^B(f)$ und $M_B^B(f)$ an.

(e) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von f jeweils durch Angabe einer Basis.

H9.7 Hinweis: Zur Lösung dieser rechenintensiven Aufgabe können Sie ausnahmsweise elektronische Hilfsmittel verwenden.

Gegeben sei die rechts im Diagramm skizzierte Figur F mit den Punkten

$x_1 = (0,0,0)^T, x_2 = (1,0,0)^T, x_3 = (1,1,0)^T, x_4 = (0,1,0)^T,$
$x_5 = (0,0,1)^T, x_6 = (1,0,1)^T, x_7 = (1,1,1)^T, x_8 = (0,1,1)^T,$
$x_9 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)^T, x_{10} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)^T.$



(a) Skizzieren Sie den Aufriss der Figur, d.h. die Projektion in die x-y-Ebene.

(b) Die Basis $B_G = ((1,0,0)^T, (0,0,1)^T, (0,1,0)^T)$ überführt die Figur in den Grundriss. Berechnen Sie den Grundriss, indem Sie die zugehörige Basiswechselmatrix G bestimmen und die Produkte $G \cdot x_i$ für alle $i \in \{1, \dots, 10\}$ berechnen. Skizzieren Sie die Projektion der Figur in die x-y-Ebene (d.h. in die von den ersten beiden Basisvektoren aufgespannte Ebene durch den Nullpunkt) und überlegen Sie, ob Ihr Ergebnis stimmt.

(c) Die Basen

$$B_L = \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right) \text{ und } B_S = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right)$$

liefern eine Darstellung von vorn links bzw. von „schräg oben“. Berechnen Sie analog zu (b) die Bilder der Punkte $x_1, \dots, x_{10}$ unter den induzierten Basiswechselmatrizen L bzw. S, skizzieren Sie die Projektion der Ergebnisse in die x-y-Ebene und vergleichen Sie mit Ihrer Anschauung.

(d) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix Q, die die Koordinaten bezüglich B_S in die Koordinaten bezüglich B_L überführt. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis durch folgende beide Möglichkeiten der Probe:

   (1) Berechnung der Bilder $Q \cdot y_i$, dabei seien die y_i die Koordinaten der Punkte aus F bezüglich B_L (d.h. $y_i = L \cdot x_i$).

   (2) Durch Berechnung von $L \cdot S^{-1}$. (Warum ist das gleich Q?)