TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

10. Übungsblatt für die Übungen vom 10.12.-14.12.2018

Determinanten

V10.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) durch Überführung in eine Zeilenstufenform,

(b) mit der Regel von Sarrus,

(c) mit Hilfe des Entwicklungssatzes.

Ü10.2 Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 8 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A_1, A_2, A_3.

(b) Berechnen Sie die Determinanten von A_1^T, $(A_1)^2$, A_2^{-1}, $2A_2$, $(A_1A_2)^{-1}$.

(c) Überführen Sie die Matrix B mittels elementarer Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix und ermitteln Sie deren Determinante.

(d) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix C mit dem Entwicklungssatz.

Ü10.3 (a) Beweisen Sie: Ist $(a_{ij}) = A \in K^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, dann gilt $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

(b) Beweisen Sie: Sind $A \in K^{n\times n}, B \in K^{m\times m}, C \in K^{n\times m}$ Matrizen, dann gilt für die Blockmatrix $D := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in K^{(m+n)\times(m+n)}$ die Formel $\det D = \det A \cdot \det B$.

Ü10.4 Gibt es Matrizen $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit:

$$AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BB^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad CC^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad DD^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Geben Sie Beispiele an bzw. begründen Sie, warum derartige Matrizen nicht existieren. Nutzen Sie dazu u.a. die Determinantenfunktion und deren Eigenschaften.

A10.5 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Namen und Matrikelnr.) bis 17.12.2018, 12:00 Uhr**

(a) Für welche reellen Zahlen λ ist die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \lambda \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \text{ von Null verschieden?}$$

(b) Für welche reellen Zahlen λ sind die Vektoren $(0,-1,1,2)^T, (\lambda,2,3,-1)^T, (-1,0,2,1)^T, (2,1,\lambda,-1)^T \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig?

(c) Für welche reellen Zahlen λ sind die reellen Polynome $-x^3+x^2+2x, 2x^3+3x^2-x+\lambda, 2x^2+x-1, x^3+\lambda x^2-x+2$ linear unabhängig?

Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis aus (a), um (b) und (c) zu lösen.

H10.6 Zeigen Sie, dass für die Vandermonde-Matrix $V_3 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ die Gleichung $\det(V_3) = (x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)$ für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ gilt.

H10.7 Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Determinantenfunktion:

(a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(b) Ist $B \in K^{n\times n}$ ähnlich zu A, dann gilt $\det(A) = \det(B)$.

(c) Verifizieren Sie, dass i.A. $\det(A) + \det(B) \neq \det(A+B)$ gilt.

(d) Mit $SL_n(K)$ wird die Menge aller $n \times n$-Matrizen über K bezeichnet, deren Determinante gleich 1 ist. Zeigen Sie, dass $(SL_n(K), \cdot)$ eine Untergruppe von $(GL_n(K), \cdot)$ ist.

H10.8 Bestimmen Sie mit der *Cramer'schen Regel* (Vorlesung 4/2/2) die Lösungen der folgenden, durch erweiterte Koeffizientenmatrizen gegebenen Gleichungssysteme:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 14 \\ 3 & 3 & 3 & 18 \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 11 & 4 & 4 \end{array}\right), \qquad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 11 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Hinweis: Argumentieren Sie bei der Koeffizientenmatrix C sorgfältig: Hat das lineare Gleichungssystem eine Lösung?

H10.9 Es sei K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Verifizieren Sie, dass die Determinantenfunktion $\det(A) = ad - bc$ tatsächlich die Eigenschaften (a), (b) und (c) aus Vorlesung 4/1/1 besitzt.