TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

11. Übungsblatt für die Übungen vom 17.12.-21.12.2018

Polynome, Eigenwerte

V11.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $P = T^2 + T - 6 \in R[T]$ für den Ring $R = \mathbb{R}$ und für den Ring $R = \mathbb{Z}_6$.

Hinweis: In der Vorlesung wurden Polynomringe nur über Körpern eingeführt. Die Theorie der Polynomringe über kommutativen Ringen ist aber analog.

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $Q = T^3 + 3T^2 + 4T + 2$ in $\mathbb{C}$.

Ü11.2 Beweisen Sie (vgl. Vorlesung): Ist K ein Körper, dann ist $K[T]$ ein kommutativer Ring mit Einselement (der Polynomring über K).

Zeigen Sie außerdem, dass für alle Polynome $P, Q \in K[T]$ gilt: $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Hinweis: Damit ist $K[T]$ *nullteilerfrei*, d.h. $PQ = 0 \implies P = 0$ oder $Q = 0$.

Ü11.3 (a) Es sei $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie, dass $v_1 = (1,1)^T$ ein Eigenvektor von Mist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1. Zeigen Sie, dass $\lambda_2 = 1$ ein Eigenwert von M ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $E_M(\lambda_2)$.

(b) Bestimmen Sie für die gegebenen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ jeweils das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und eine Basis für jeden Eigenraum. Geben Sie auch die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ü11.4 (a) Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in K^{n\times n}$, die zur Einheitsmatrix $E \in K^{n\times n}$ ähnlich sind.

(b) Beweisen Sie Korollar 5/1/9 durch direktes Nachrechnen: Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von 5/1/9 nicht gilt, d.h. finden Sie eine zu E nicht-ähnliche Matrix B mit $\det(B - \lambda E) = \det(E - \lambda E)$ für alle $\lambda \in K$.

A11.5 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Namen und Matrikelnr.) bis 7.1.2019, 12:00 Uhr**

(a) Es seien x_6 und x_7 die beiden letzten Ziffern Ihrer Matrikelnummer. Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_i und eine Basis der jeweiligen Eigenräume $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x_6 & 1 & 1 \\ 1 & x_6 & 1 \\ -1 & 1 & x_7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(b) Beweisen Sie folgende Aussagen:

  (i) Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

  (ii) Zerfällt für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ das charakteristische Polynom in Linearfaktoren, dann ist $\det(A)$ Produkt der Eigenwerte von A.

H11.6 Zeigen Sie: Hat das Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ mindestens 4 Nullstellen in $\mathbb{Z}$, dann ist $f(k) \neq 5$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

H11.7 Gesucht sind alle Eigenwerte der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ 1, & \text{falls } i \neq j \end{cases} .$$

H11.8 Es sei $M = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Matrix über dem Körper $\mathbb{C}$. Die Vektoren $v_1 = (i, -1, 1)^T$, $v_2 = (i, 0, 1)^T$ sind Eigenvektoren der Matrix M.

(a) Welche Eigenwerte hat die Matrix M und welche Dimensionen haben die zugehörigen Eigenräume?

(b) Bilden die Basisvektoren der Eigenräume eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{C}^3$?

(c) Welchen Wert hat die Determinante von M?

(d) Sind die Spaltenvektoren der Matrix M linear unabhängig und welchen Rang hat M?

(e) Geben Sie den Kern von M an.

(f) Durch die Matrix M ist eine lineare Abbildung gegeben. Ist diese Abbildung injektiv?