TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

12. Übungsblatt für die Übungen vom 7.1.-11.1.2019

Diagonalisierung

V12.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Begründen Sie, jeweils für die Fälle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$, ob die Matrizen $A, B, C \in K^{2\times 2}$ diagonalisierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ü12.2 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $g = \mathbb{R}v$ mit $v = \binom{2}{1} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Veranschaulichen Sie sich diese Abbildung geometrisch und überlegen Sie damit, welche Eigenwerte f hat und was die dazugehörigen Eigenräume sind. Geben Sie eine Basis $B' = (u_1, u_2)$ von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von f an.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A := M_B^B(f)$ bzgl. der Standardbasis $B = (e_1, e_2)$.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D := M_{B'}^{B'}(f)$ bzgl. der Basis $B' = (u_1, u_2)$.

(d) Berechnen Sie eine reguläre Matrix S, so dass $D = S^{-1}AS$ gilt. Ist S eindeutig bestimmt?

Ü12.3 (a) Beweisen Sie: Ist $A \in K^{m\times m}$ eine diagonalisierbare Matrix, d.h. existieren eine reguläre Matrix $S \in K^{m\times m}$ und eine Diagonalmatrix $D \in K^{m\times m}$ mit $A = S^{-1}DS$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $A^n = S^{-1}D^nS$.

Hinweis: Mit Hilfe der hier bewiesenen Gleichung können hohe Potenzen einer Matrix einfach berechnet werden, das ist z.B. zur Handhabung sog. diskreter dynamischer Systeme, vgl. H12.8, nützlich.

(b) Es sei $A \in K^{m\times m}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Eigenwert λ von A gilt: λ^n ist ein Eigenwert von A^n.

(c) Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von A^n ist.

Ü12.4 Eine „Hecke“ wachse in der Ebene $\mathbb{R}^2$ nach folgenden Regeln:

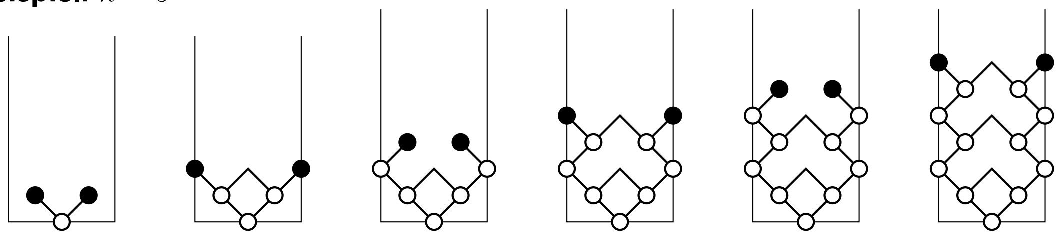
(1) Die Knospen der Hecke liegen auf Gitterpunkten $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

(2) Von einer Knospe im Punkt (x, y) wachsen im Laufe eines Jahres - falls möglich - zwei Zweige diagonal nach oben (zu den Punkten $(x - 1, y + 1)$ und $(x + 1, y + 1)$).

(3) Endet in einem Gitterpunkt genau ein Zweig, so entsteht dort eine Knospe. Falls zwei Zweige zusammenstoßen, entsteht keine Knospe.

(4) Das Heckenwachstum ist seitlich durch (unendlich hohe) Wände begrenzt, o.B.d.A. sollen die Wände an den Punkten (1,0) und $(n, 0)$ beginnen.

Beispiel: $n = 5$



Wir beschreiben das Wachstum der Hecke durch die Folge $b_k \in \mathbb{Z}_2^n$, für $k = 1, 2, \dots$, wobei $b_k := (a_{k1}, \dots, a_{kn})$ durch die oberste Knospenlage im k-ten Jahr gegeben ist: $a_{ki} = 1$, falls im Punkt (i, k) eine Knospe ist (sonst $a_{ki} = 0$). Im angegebenen Beispiel etwa ist $b_0 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $b_2 = b_4 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $b_3 = b_5 = (0, 1, 0, 1, 0)$.

(a) Untersuchen Sie das Heckenwachstum für verschiedene Werte von n (speziell $n = 3, 4, 7$) und verschiedene Anfangsknospungen b_0 unter folgendem Gesichtspunkt: *Wie hoch kann die Hecke wachsen?*

(b) Finden Sie eine Matrix $A_n \in K^{n\times n}$ über dem Körper $K = \mathbb{Z}_2$, so dass $b_{k+1}^T = A_n b_k^T$. Beschreiben Sie b_k durch eine Formel mit A_n und b_0.

Hinweis: Beachten Sie die Rechenregeln für Addition und Multiplikation in K.

(c) Beweisen Sie: Für $n = 2^m - 1$ ist das charakteristische Polynom von A_n gerade $\chi_A = \lambda^n$.

Hinweis: Für $k \geq 2$ zeigt man durch Entwicklung nach der mittleren Spalte $\det(A_{2k+1} - \lambda E) = \lambda \cdot \det(A_k - \lambda E)^2$ und macht dann eine vollständige Induktion über m.

(d) Zeigen Sie unter Benutzung des Satzes von *Cayley-Hamilton* (Vorlesung 5/2), dass eine Hecke der Breite $n = 2^m - 1$ spätestens im n-ten Jahr nicht mehr weiter wächst.

A12.5 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Namen und Matrikelnr.) bis 14.1.2019, 12:00 Uhr**

Wir betrachten, in Abhängigkeit von den Parametern $m, n \in \mathbb{R}$, die Matrix

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & n & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A_{m,n}$.

(b) Für welche Wertepaare (m, n) ist der Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von $A_{m,n}$? Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ und den Eigenraum $\mathrm{Eig}_{A_{m,n}}(\lambda)$.

(c) Wählen Sie m gleich der vorletzten und n gleich der letzten Ziffer Ihrer Matrikelnummer. Untersuchen Sie, ob die Matrix $A_{m,n}$ für diese konkreten Werte von m und n diagonalisierbar ist. Geben Sie in diesem Fall die zu $A_{m,n}$ ähnliche Diagonalmatrix D sowie die Transformationsmatrix S an, für die $D = S^{-1} A_{m,n} S$ gilt. Machen Sie eine Probe, indem Sie $S^{-1} A_{m,n} S$ ausrechnen.

H12.6 Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine reguläre Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$.

(a) Beweisen Sie, dass $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_r^{-1}$ die Eigenwerte von A^{-1} sind.

Hinweis: Dazu müssen Sie auch zeigen, dass A^{-1} keine weiteren Eigenwerte hat.

Was lässt sich über die Eigenräume $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A)$ und $\mathrm{Eig}_{\lambda_i^{-1}}(A^{-1})$ aussagen?

(b) Beweisen Sie, dass $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Eigenwerte von A^T sind.
Sind auch die zugehörigen Eigenräume von A und A^T gleich?

H12.7 Berechnen Sie Eigenwerte und deren Eigenräume der *Schachbrettmatrix* $S_n = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (mit $n \in \mathbb{N}$), definiert durch

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i+j) \text{ gerade ist} \\ 0, & \text{falls } (i+j) \text{ ungerade ist} \end{cases} .$$

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist S_n diagonalisierbar?

Untersuchen Sie die Diagonalisierbarkeit nochmals für den Fall, dass der zugrundeliegende Körper $\mathbb{Z}_2$ ist.

H12.8 Sogenannte „Räuber-Beute-Systeme“ können vereinfacht als diskretes dynamisches System dargestellt werden. Ein Beispiel dafür ist die gut untersuchte Beziehung zwischen Fleckenkauz und Buschratte. Seien E_k und R_k die Eulen- und die Rattenpopulation (in Tausend) zum Zeitpunkt k, dann berechnen sich die Populationen zum Zeitpunkt $k+1$ als:

$$E_{k+1} = a \cdot E_k + b \cdot R_k,$$
$$R_{k+1} = c \cdot E_k + d \cdot R_k.$$

Berechnen Sie für die Startwerte $s_1 = (E_0, R_0)^T = (10, 10)^T$, $s_2 = (30, 10)^T$ und $s_3 = (10, 20)^T$ die Populationen zum Zeitpunkt $k = 100$ für folgende Parameter (Hinweis: verwenden Sie Ü12.3(a)):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ -0,4 & 1,7 \end{pmatrix} =: A \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0.5 & 1,5 \end{pmatrix} =: B.$$

Hinweis: Modelle solcher „Räuber-Beute-Systeme“ sind i.A. viel komplexer, die hier beschriebene lineare Abhängigkeit kann zumindest als Basis dieser Prozesse angesehen werden.

H12.9 Die Folge der Fibonacci-Zahlen $c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{N}$ ist definiert durch $c_0 := 0$, $c_1 := 1$ und $c_{n+2} = c_n + c_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an derart, dass

$$A \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n+2} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ derart, dass $D = S^{-1}AS$ Diagonalgestalt besitzt.

(c) Berechnen Sie (mittels Ihres Ergebnisses im Teil (b)) die Matrix A^n für $n \in \mathbb{N}$.

(d) Geben Sie für die Folge c_n eine explizite Darstellung an, d.h. einen geschlossenen Ausdruck, der nur von n abhängt.