Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

13. Übungsblatt für die Übungen vom 14.1.-18.1.2019

Skalarprodukte, Orthogonalität

V13.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt.

- Für welche $k \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(k, k, 1)^T$ und $(k, 5, 6)^T$ zueinander orthogonal?
- Bilden die Vektoren $v_1 := (1, 0, 1)^T$, $v_2 := (-1, 4, 1)^T$, $v_3 := (2, 1, -2)^T$ eine Orthonormalbasis von $U := \text{lin}(\{v_1, v_2, v_3\})$? Finden Sie eine Orthonormalbasis von U.

(b) Es seien $u = (u_1, u_2)^T$ und $v = (v_1, v_2)^T$ Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die durch

$$u \bullet v := 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2$$

definierte Verknüpfung die Eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt.

Ü13.2 Geben Sie zwei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$ an, die die Norm 1 haben und zu den Vektoren $v_1 := (2, 1, -4, 0)^T$, $v_2 := (-1, -1, 2, 2)^T$, $v_3 := (3, 2, 5, 4)^T$ orthogonal sind.

Berechnen Sie zum Untervektorraum $U := \text{lin}(\{v_1, v_2, v_3\})$ das orthogonale Komplement $U^\perp$ im Vektorraum $\mathbb{R}^4$.

Ü13.3 Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

(a) Zeigen Sie die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$\forall x, y \in V : |x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

(b) Zeigen Sie den *Satz des Pythagoras*: Es ist

$$\forall x, y \in V : x \perp y \Rightarrow |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

($x \perp y$ heißt, dass x und y *orthogonal* sind, d. h. $\langle x, y \rangle = 0$). Zeigen Sie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dass auch die Umkehrung gilt:

$$\forall x, y \in V : |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 \Rightarrow x \perp y.$$

(c) Zeigen Sie den Höhensatz der Elementargeometrie: Sind $v, w \in V$ orthogonal und ist x der Höhenfußpunkt des Nullvektors auf die durch v und w bestimmte Gerade $g = v + \mathbb{R}(w - v)$, dann gilt $|x|^2 = |v - x| \cdot |x - w|$.

Hinweis: Nutzen Sie den Spezialfall der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung $x \parallel y \implies |\langle x, y \rangle| = |x| \cdot |y|$ geeignet aus. Sie können z.B. zeigen, dass beide Seiten der Gleichung $|\langle v, x \rangle|$ ergeben.

Ü13.4 Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen Skalarprodukt. Wenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren an, um aus den Vektoren

$$v_1 := (0, 2, 1, 0)^T, \quad v_2 := (1, -1, 0, 0)^T, \quad v_3 = (1, 1, 1, 0)^T, \quad v_4 := (1, 2, 0, -1)^T$$

eine Orthonormalbasis von $\text{lin}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ zu konstruieren.

A13.5 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Namen und Matrikelnr.) bis 21.1.2019, 12:00 Uhr**
Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und $\langle .,. \rangle : V \to \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt in V. Weiter seien $v_1 = (1,-1,1,-1)^T$ und $v_2 = (6,1,0,-7)^T$ Elemente von V.

(a) Berechnen Sie $\langle 2v_1, \frac{1}{2}v_2 \rangle$.

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U := \mathrm{lin}(\{v_1, v_2\})$.

(c) Bestimmen Sie die Dimension des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U.

(d) Berechnen Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U.

(e) Beweisen Sie: In V gilt: $\forall v, w \in V : |v| = |w| \implies (v+w) \perp (v-w)$.

H13.6 Es seien $x, y, z > 0$ mit $x+y+z = 1$. Zeigen Sie mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9.$$

(*Hinweis*: Sie können z. B. $3 = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{y}}\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{z}$ schreiben . . .)

H13.7 Eine geneigte Stahlplatte, die in den Punkten $v_1 = (1,0,2)^T \in \mathbb{R}^3$ und $v_2 = (0,1,1)^T \in \mathbb{R}^3$ aufliegt, soll durch eine Verstrebung am Punkt $y = (-5,-2,6)^T$ so befestigt werden, dass die Platte gleichzeitig den Punkt $(0,0,0)^T$ berührt (die Dicke der Platte wird vernachlässigt).

An welchem Punkt $u \in \mathbb{R}^3$ muss die Verstrebung an der Platte befestigt werden, damit die Verstrebung so kurz wie möglich ist. Wie lang muss die Verstrebung mindestens sein?

Überlegen Sie zusätzlich, wie der Punkt auf der Platte, an dem die Verstrebung angeschweißt werden muss, markiert werden kann, wenn die Auflagepunkte bereits markiert sind (d.h. wo die Platte auf $(0,0,0)^T$, v_1 und v_2 anliegen soll). Berechnen Sie die Abstände des Schweißpunktes zu den Auflagepunkten. Hinweis: Bestimmen Sie zuerst eine Orthogonalbasis für die von der Stahlplatte definierte Ebene U und bestimmen Sie anschließend die orthogonale Projektion von y auf U.

H13.8 Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $v \in V$. Man zeige:

(a) Es existiert genau ein $u_0 \in U$ mit $v - u_0 \in U^\perp$.

(b) Für alle $u \in U$ mit $u \neq u_0$ gilt $|v-u| > |v-u_0|$.