TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

14. Übungsblatt für die Übungen vom 21.1.-25.1.2019

Orthonormalbasen, Isometrien

V14.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ i+1 \end{pmatrix}$ spannen einen zweidimensionalen Unterraum des $\mathbb{C}^3$ auf. Bestimmen Sie zunächst eine Orthonormalbasis des Unterraums, wobei auf $\mathbb{C}^3$ das kanonische Skalarprodukt zugrundegelegt werde. Zeigen Sie, dass $w = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 2+\frac{i}{2} \end{pmatrix}$ in diesem Unterraum liegt und stellen Sie w als Linearkombination der Vektoren der von Ihnen gefundenen Orthonormalbasis dar.

Ü14.2 Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}[x]_3$ der Polynomfunktionen vom Grad kleiner 3 (vgl. Ü5.4).

(a) Das Tripel (f_1, f_2, f_3) mit $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[x]_3$. Orthonormieren Sie diese Basis mit dem Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $g(x) = x^2 - x$ bzgl. der orthonormierten Basis.

Ü14.3 (a) Zeigen Sie: Jede Spiegelung $s_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich einer Spiegelgerade mit Anstiegswinkel $\frac{\alpha}{2}$ ist eine orthogonale Abbildung.

(b) Zeigen Sie: Jede Drehung $d_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Winkel α ist eine orthogonale Abbildung.

(c) Zeigen Sie: Jede orthogonale Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Drehung oder eine Spiegelung.

Ü14.4 Es sei f bzw. A eine orthogonale oder unitäre Abbildung bzw. Matrix und λ sei ein Eigenwert von f bzw. A. Beweisen Sie (vgl. VL 6/5/1 und 6/5/3)

(a) $|\det(f)| = 1$, $|\det(A)| = 1$,

(b) $|\lambda| = 1$.

A14.5 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Namen und Matrikelnr.) bis 25.1.2019, 12:00 Uhr**
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\det(A) = 1$ und ist n ungerade, dann ist 1 ein Eigenwert von A.

(b) Gilt $\det(A) = -1$, dann ist -1 ein Eigenwert von A.

(c) Gilt $\det(A) = -1$ und ist n gerade, dann ist 1 ein Eigenwert von A.

Hinweis: Sie können die Identitäten $A(A^T - E) = E - A$ und $A(A^T + E) = E + A$ ausnutzen.

H14.6 Es sei V der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ (auf dem Intervall $[-\pi, \pi] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq x \leq \pi\}$) mit der Abbildung

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

(b) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen aus V die Norm und die Skalarprodukte:

$$k : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_n : t \mapsto \cos(nt), \quad s_n : t \mapsto \sin(nt).$$

H14.7 Beweisen Sie: Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine normale Matrix und ist A invertierbar, dann ist A^{-1} ebenfalls normal.

Gibt es normale Matrizen, die nicht invertierbar sind?

H14.8 Beweisen Sie den *Satz vom Fußball*: „Bei jedem Fußballspiel gibt es zwei Punkte auf der Oberfläche des Balls, die sich zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit, wenn der Ball genau auf dem Anstoßpunkt liegt, an derselben Stelle im umgebenden Raum befinden.“

Hinweis: Beweisen Sie zuerst: Jede Drehung (um eine Achse $\mathbb{R}v$) im $\mathbb{R}^3$ lässt sich durch eine Darstellungsmatrix A mit Determinante 1 beschreiben. Überlegen Sie als nächstes, warum die Hintereinanderausführung solcher Drehungen wieder eine Darstellungsmatrix B mit Determinante 1 ergibt. Schließlich müssen Sie zeigen (vgl. A14.5), dass B den Eigenwert 1 besitzt.