TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Claußnitzer, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker (Modul Phy-MA-LA-BA), Wintersemester 2018/19

15. Übungsblatt für die Übungen vom 28.1.-1.2.2019

selbstadjungierte Abbildungen

V15.1 **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und der zugehörige Endomorphismus $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $x \mapsto Ax$. Auf $\mathbb{C}^2$ werde das kanonische Skalarprodukt zugrunde gelegt.

(a) Warum ist φ selbstadjungiert? Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von φ. Geben Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ an derart, dass $S^*AS = S^{-1}AS = D$ ist.

(b) Wie lautet die Darstellungsmatrix von φ bzgl. der Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathbb{C}^2$?

(c) Wie kann es sein, dass diese Matrix nicht hermitesch ist, obwohl φ selbstadjungiert ist (vgl. Bemerkung 6/6/2)?

Ü15.2 Führen Sie die Hauptachsentransformation zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

durch, d.h. bestimmen Sie orthogonale Matrizen S, T so, dass S^TAS bzw. T^TBT Diagonalmatrizen sind.

Ü15.3 Durch die Gleichung

$$\frac{5}{8}x_1^2 + \frac{3}{4}x_1x_2 + \frac{5}{8}x_2^2 - \frac{13\sqrt{2}}{4}x_1 - \frac{11\sqrt{2}}{4}x_2 + \frac{33}{4} = 0$$

ist eine Ellipse gegeben.

(a) Schreiben Sie diese Gleichung in Matrizenschreibweise, führen Sie die Hauptachsentransformation durch und überführen Sie die Gleichung so in eine Gleichung der Form $A_1(y_1+a_1)^2 + A_2(y_2+a_2)^2 = 1$, wobei y_1, y_2 Koordinaten bzgl. einer geeigneten ONB sind und $A_1, A_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie die Halbachsenlängen und den Mittelpunkt der Ellipse an.

(c) Zeichnen Sie die Ellipse in ein kartesisches Koordinatensystem ein (Einheitslänge: 1 cm).

H15.4 Es sei $x \in \mathbb{R}$ und

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

eine Matrix.

(a) Begründen Sie (ohne Rechnung), dass A_x diagonalisierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = x - 1$ ein Eigenwert von A_x ist. Welche Dimension hat der Eigenraum $\mathrm{Eig}_{A_x}(\lambda_1)$?

(c) Zeigen Sie, dass $(1, 1, 1)^T$ ein Eigenvektor von A_x ist. Was ist der zugehörige Eigenwert λ_2? Welche Dimension hat der Eigenraum $\mathrm{Eig}_{A_x}(\lambda_2)$?

(d) Bestimmen Sie die Eigenräume $\mathrm{Eig}_{A_x}(\lambda_1)$ und $\mathrm{Eig}_{A_x}(\lambda_2)$.

(e) Geben Sie (in Abhängigkeit von x) eine zu A_x ähnliche Diagonalmatrix D_x an.

(f) Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von x) eine orthogonale Matrix S_x, so dass $D_x = S_x^{-1} A_x S_x$ gilt.

H15.5 Es sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Zeigen Sie, dass ein Endomorphismus $f : V \to V$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn ein Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ auf V existiert, für welches f selbstadjungiert ist.

H15.6 Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ heißt *normal*, falls $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ gilt. Im Folgenden sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ normal.

(a) Zeigen Sie: $\forall x, y \in V : \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(y) \rangle$.

(b) Folgern Sie $\ker \varphi = \ker \varphi^*$.

(c) Zeigen Sie, dass mit φ auch $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ normal ist.

(d) Folgern Sie aus (b) und (c), dass für $x \in V \backslash \{0\}$ folgende Äquivalenz gilt:

$$\varphi(x) = \lambda x \Leftrightarrow \varphi^*(x) = \bar{\lambda} x.$$

(e) Zeigen Sie: Ist $x \in V \backslash \{0\}$ ein Eigenvektor von φ, so ist das orthogonale Komplement $(\mathbb{K}x)^\perp$ von $\mathbb{K}x = \mathrm{lin}(\{x\})$ invariant bezüglich φ, d. h. für $y \in (\mathbb{K}x)^\perp$ gilt $\varphi(y) \in (\mathbb{K}x)^\perp$.

(f) Folgern Sie (z. B. durch vollständige Induktion) folgenden Satz: Es sei $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Dann sind äquivalent:

(i) ψ ist normal,

(ii) V besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von ψ.

H15.7 Es sei V ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum mit endlicher Dimension. Zeigen Sie: Sei $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$. Dann ist äquivalent:

(a) ψ ist eine Isometrie.

(b) Für alle Eigenwerte λ von ψ gilt $|\lambda| = 1$, und V besitzt eine Orthonormalbasis, bestehend aus Eigenvektoren von ψ.

Nutzen Sie dazu am besten das Ergebnis der vorigen Aufgabe (Spektralsatz für normale Abbildungen).

Die Lösungen zu den letzten beiden Aufgaben finden Sie z.B. im Lehrbuch „Lineare Algebra“ von S. Bosch auf S. 267f. bzw. S. 275.