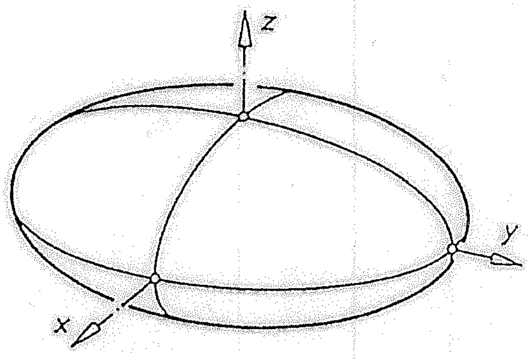
Mittelpunktsquadriken

Ellipsoid



Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

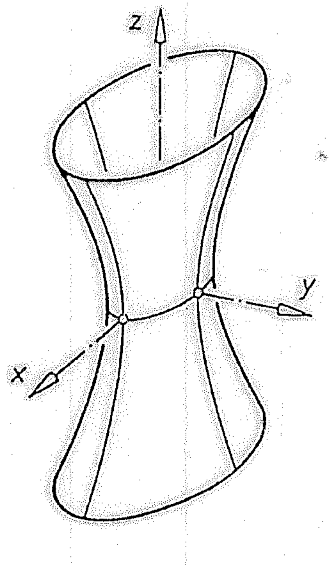
Parameterdarstellung:

- $\underline{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos u \cdot \cos v \\ b \cdot \sin u \cdot \cos v \\ c \cdot \sin v \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \leq u < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \end{matrix}$

- $\underline{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a \cdot v \cdot \cos u \\ b \cdot v \cdot \sin u \\ \pm c \cdot \sqrt{1 - v^2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \leq u < 2\pi \\ |v| \leq 1 \end{matrix}$

Bemerkung zur Rotation:
$a = b$: Rotationsellipsoid
$a = b > c$: abgeplattet
$a = b < c$: spindelförmig

Einschaliges Hyperboloid



Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Parameterdarstellung:

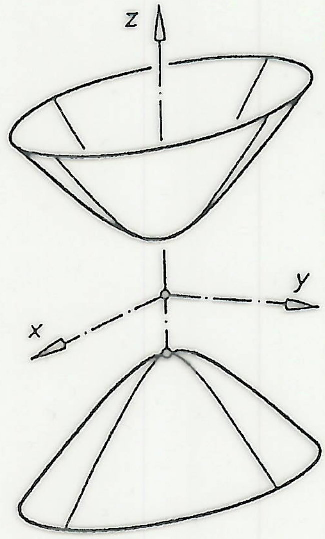
- $\underline{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a \cdot v \cdot \cos u \\ b \cdot v \cdot \sin u \\ \pm c \cdot \sqrt{v^2 - 1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \leq u < 2\pi \\ |v| \geq 1 \end{matrix}$

- $\underline{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a \cdot (\cos v + u \cdot \sin v) \\ b \cdot (\sin v - u \cdot \cos v) \\ c \cdot u \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} -\infty < u < \infty \\ 0 \leq v < 2\pi \end{matrix}$

  $v = const$: windschiefe Geraden (eine Erzeugendenschar, die in die andere Erzeugendenschar übergeht, wenn man c durch $-c$ ersetzt)

Bemerkung zur Rotation:
$a = b$: Einschaliges Rotationshyperboloid
(Rotation um Nebenachse der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$)

Zweischaliges Hyperboloid



Gleichung:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Parameterdarstellung:

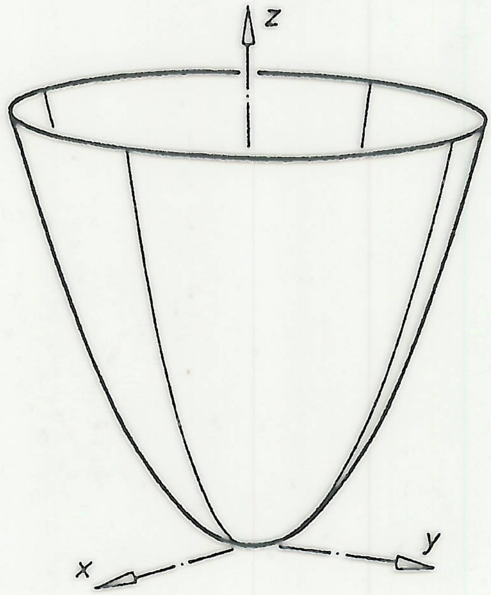
$$\underline{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a \cdot v \cdot \cos u \\ b \cdot v \cdot \sin u \\ \pm c \cdot \sqrt{1+v^2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \le u < 2\pi, \quad 0 \le v < \infty \\ \text{oder} \\ 0 \le u < \pi, \quad v \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Bemerkung zur Rotation:

$a = b$: Zweischaliges Rotationshyperboloid
(Rotation um Hauptachse der Hyperbel $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$)

Paraboloide

Elliptisches Paraboloid



Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

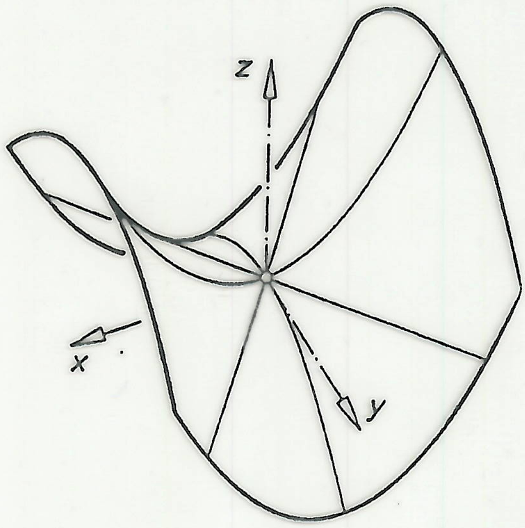
Parameterdarstellung:

- $$\underline{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a \cdot v \cdot \cos u \\ b \cdot v \cdot \sin u \\ \frac{1}{2} v^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \leq u < 2\pi \\ 0 \leq v < \infty \end{matrix}$$

- $$\underline{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a \cdot u \\ b \cdot v \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} -\infty < u < \infty \\ -\infty < v < \infty \end{matrix}$$

Bemerkung zur Rotation:
Rotationsparaboloid für $a = b$

Hyperbolisches Paraboloid



Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Parameterdarstellung:

- $$\underline{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a \cdot u \\ b \cdot v \\ \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} -\infty < u < \infty \\ -\infty < v < \infty \end{matrix}$$

- $$\underline{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}(u + v) \\ \frac{b}{2}(u - v) \\ \frac{1}{2} u \cdot v \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} -\infty < u < \infty \\ -\infty < v < \infty \end{matrix}$$

$u = const$: Geraden parallel zur Ebene $b \cdot x + a \cdot y = 0$
$v = const$: Geraden parallel zur Ebene $b \cdot x - a \cdot y = 0$