Lösungen zur Probeklausur

1. Ein Körper ist ein Tripel $(K,+,\cdot)$ aus einer Menge K und zwei Operationen $+ : K\times K \longrightarrow K$ und $\cdot : K\times K \longrightarrow K$ derart, dass folgende Axiome gelten:

   $(\tilde{a})$ Bezüglich $+$ bildet K eine abelsche Gruppe.

   $(\tilde{b})$ Bezüglich $\cdot$ bildet $K\setminus\{0\}$ eine abelsche Gruppe (dabei ist 0 das neutrale Element bzgl. $+$).

   $(\tilde{c})$ $\forall\, \lambda,\mu,\nu \in K : \quad (\lambda+\mu)\cdot\nu = \lambda\cdot\nu+\mu\cdot\nu,$
   $\nu\cdot(\lambda+\mu) = \nu\cdot\lambda+\nu\cdot\mu.$

Ein Vektorraum über einem Körper K ist ein Tripel $(V,+,\cdot)$ aus einer Menge V und zwei Operationen $+ : V\times V \longrightarrow V$ und $\cdot : K\times V \longrightarrow V$ derart, dass die folgenden Axiome gelten:

   $(\hat{a})$ Bezüglich $+$ bildet V eine abelsche Gruppe.

   $(\hat{b})$ Für $\lambda,\mu\in K$ und $v,w\in V$ gelten
   $\lambda\cdot(\mu\cdot v) = (\lambda\cdot\mu)\cdot v$, $(\lambda+\mu)\cdot v = \lambda\cdot v+\mu\cdot v$,
   $\lambda\cdot(v+w) = \lambda\cdot v+\lambda\cdot w$, $1\cdot v = v$ (dabei ist 1 das neutrale Element bzgl. $\cdot$ in $K\setminus\{0\}$).

Beweise: (a) Es sei $\lambda\mu = 0$ für $\lambda,\mu\in K$. Wäre $\lambda\neq 0$, so existierte wegen $(\tilde{b})$ (s.o.) ein $\lambda^{-1}\in K\setminus\{0\}$ mit $\lambda\lambda^{-1}=1$, also $\lambda^{-1}(\lambda\mu) \overset{(\tilde{b})}{=} \underbrace{(\lambda^{-1}\lambda)}_{=1}\mu = \mu = \lambda^{-1}\cdot 0 = 0$ (die letzte Gleichung wegen $\lambda^{-1}\cdot 0 \overset{(\tilde{a})}{=} \lambda^{-1}\cdot(0+0) \overset{(\tilde{c})}{=} \lambda^{-1}\cdot 0+\lambda^{-1}\cdot 0$, also $0 + \lambda^{-1} \cdot 0 = \lambda^{-1} \cdot 0 + \lambda^{-1} \cdot 0$ und daher $0 = \lambda^{-1} \cdot 0$).

Damit ist $\mu = 0$ gezeigt. ■

(b) Ist $\lambda v = 0$ für $\lambda \in K$, $v \in V$ mit $\lambda \neq 0$, so gäbe es $\lambda^{-1} \in K \setminus \{0\}$ mit $\lambda \lambda^{-1} = 1$, also

$$\lambda^{-1}(\lambda v) \overset{(\hat{b})}{=} (\lambda^{-1}\lambda) v \overset{(\hat{b})}{=} 1 \cdot v \overset{(\hat{b})}{=} v = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$$

(die letztere Gleichung gilt wegen $\lambda^{-1} \cdot 0 \overset{(\hat{a})}{=} \lambda^{-1} \cdot (0+0) \overset{(\hat{b})}{=}$ $= \lambda^{-1} \cdot 0 + \lambda^{-1} \cdot 0$, also $0 + \lambda^{-1} \cdot 0 = \lambda^{-1} \cdot 0 + \lambda^{-1} \cdot 0$, d.h. $0 = \lambda^{-1} \cdot 0$ wegen $(\hat{a})$; hierbei bezeichnet 0 das neutrale Element in V bzgl. $+$). Damit ist $v = 0$ gezeigt. ■

2. (a) Er heißt <u>normal</u>, falls $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ gilt.

(b) Für $x \in V$ gilt

$$x \in \ker \varphi \iff \varphi(x) = 0 \overset{\text{Skalarpr. ist positiv definit}}{\iff} \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = 0$$

$$\overset{\text{Def. adjungierte Abb.}}{\iff} \langle \varphi^* \circ \varphi(x), x \rangle = 0 \overset{\varphi \text{ normal}}{\iff} \langle \varphi \circ \varphi^*(x), x \rangle = 0$$

$$\iff \langle \varphi^*(x), \varphi^*(x) \rangle = 0 \iff \varphi^*(x) = 0 \iff x \in \ker \varphi^*,$$

also $\ker \varphi = \ker \varphi^*$. ■

3. Für $x, y \in V$ gilt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle x+y, x+y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \right),$$

denn $\langle x+y, x+y \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$

$$\overset{\text{Symmetrie}}{=} \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle.$$ ■

4. ~~Betrachte den Endomorp~~ Zunächst ist klar, dass $id_V + f$ als Summe zweier Endomorphismen wieder ein Endomorphismus ist. Zu zeigen bleibt seine Bijektivität. Betrachte dazu den Endomorphismus $id_V - f \in End_K V$. Dann gilt

$$(id_V - f)(id_V + f) = \underbrace{id_V^2}_{= id_V} + \underbrace{id_V f}_{= f} - \underbrace{f\, id_V}_{= f} - f^2 =$$
$$= id_V + f - f - \underbrace{f^2}_{= 0} = id_V,$$

also ist $id_V + f$ injektiv.

Analog gilt $(id_V + f)(id_V - f) = id_V + f - f - \underbrace{f^2}_{= 0} = id_V$, also ist $id_V + f$ surjektiv und insgesamt bijektiv. ∎

5. Gauß-Algorithmus:

I	2	1	0	1	0	0
II	0	3	−1	0	1	0
III	1	2	−1	0	0	1
I	2	1	0	1	0	0
II	0	3	−1	0	1	0
IV = III − $\frac{1}{2}$ I	0	$\frac{3}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0	1
I	2	1	0	1	0	0
II	0	3	−1	0	1	0
V = IV − $\frac{1}{2}$ II	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
I	2	1	0	1	0	0
VI = II − 2V	0	3	0	1	2	−2
V	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
VII = I − $\frac{1}{3}$ VI	2	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
VI	0	3	0	1	2	−2
V	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

$\frac{1}{2}$ VII	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$ VI	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
−2V	0	0	1	1	1	−2

Die Inverse lautet also

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Spur: $\operatorname{spur} A_\lambda = 3-\lambda+\lambda+\lambda-1 = \underline{\underline{\lambda+2}}$.

(b) Determinante:

$$\det A_\lambda = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2\lambda & \lambda & \lambda-1 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2\lambda & \lambda & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left(3\lambda-\lambda^2+4-6+2\lambda-2\lambda\right) =$$

$$= (\lambda-1)(-\lambda^2+3\lambda-2) = \underline{\underline{-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2}}.$$

(c) Rang: Berechne zunächst die Nullstellen der Determinante:

$\det A_\lambda = 0 \iff (\lambda-1)(-\lambda^2+3\lambda-2)=0$.

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-2}$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Für $\lambda \neq 1, \lambda \neq 2$ ist $\det A_\lambda \neq 0$, also A_λ regulär und $\underline{\underline{\operatorname{rg} A_\lambda = 3}}$.

Für $\lambda = 1$ ist $A_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, also $\underline{\underline{\operatorname{rg} A_\lambda = 1}}$, denn alle Spalten sind Vielfache der ersten Spalte und diese ist ungleich Null.

Für $\lambda = 2$ ist $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, also $\underline{\underline{\operatorname{rg} A_\lambda = 2}}$, denn die zweite und dritte Spalte sind linear unabhängig und die erste Spalte ist Linearkombination der hinteren beiden (z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$).

7. Bestimme zunächst die Gram'sche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \langle v,v\rangle & \langle v,w\rangle \\ \langle w,v\rangle & \langle w,w\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 1 \\ 2\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

und deren Determinante $\det A = 5\cdot 3 - 3\cdot 3 = 6$.
Das Volumen (also der Flächeninhalt) des von v, w aufgespannten Parallelogramms ist die Wurzel der zugehörigen Gram'schen Determinante, also $\underline{\underline{\sqrt{6}}}$.

8. $e_1 = \frac{1}{|v_1|} v_1$, $\quad |v_1| = \sqrt{0^2 + |i|^2 + |1|^2} = \sqrt{2}$,

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$\tilde{e}_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1$,

$$\langle v_2, e_1\rangle = 2\cdot 0 + (-i)\cdot\left(-i/\sqrt{2}\right) + (1+i)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1+i \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 - i \\ 1 + i/2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{|\tilde{e}_2|}\tilde{e}_2,$$

$$|\tilde{e}_2| = \sqrt{4 + \frac{1}{4} + 1 + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}},$$

$$e_2 = \sqrt{\frac{2}{13}}\,\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\frac{2}{13}} \\ \sqrt{\frac{1}{26}} - \sqrt{\frac{2}{13}}\,i \\ \sqrt{\frac{2}{13}} + \sqrt{\frac{1}{26}}\,i \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte ONB ist (e_1, e_2).

Der von v_1, v_2 aufgespannte Unterraum heiße U und $p_U : \mathbb{C}^3 \to U$ sei die Projektion auf U.

$$\langle w, e_1\rangle = 2\cdot 0 + \cancel{(1-i)}\,\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right) + \cancel{1}\,\left(2+\frac{i}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} + \frac{i}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\langle w, e_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{13}}\left(2\cdot 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+i\right) + \left(2 + \frac{i}{2}\right)\left(1 - \frac{i}{2}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{13}}\left(4 + \frac{1}{4} + \frac{i}{2} + \frac{9}{4} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

also $p_U w = \langle w, e_1 \rangle e_1 + \langle w, e_2 \rangle e_2 = \sqrt{2}\, e_1 + \sqrt{\frac{13}{2}}\, e_2$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} - i \\ 1 + i/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 2 + i/2 \end{pmatrix} = w ,$$

also insbesondere $w \in U$ und $w = \sqrt{2}\, e_1 + \sqrt{\frac{13}{2}}\, e_2$.

9. Der Schwerpunkt berechnet sich zu

$$s = \frac{1}{3}(p+q+r) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} .$$

10. charakterist. Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5/9 & 10/9 & 8/9 \\ +10/9 & \lambda - 2/9 & 2/9 \\ +8/9 & 2/9 & \lambda - 11/9 \end{pmatrix} = \lambda^3 - \left(\frac{5}{9} + \frac{2}{9} + \frac{11}{9}\right)\lambda^2$$

$$+ \left(\frac{-2}{9} \cdot \frac{-11}{9} - \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{-5}{9} \cdot \frac{-11}{9} - \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} + \frac{-5}{9} \cdot \frac{-2}{9} - \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} \right) \lambda - \det A =$$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{9^3}\left(110 - 160 - 160 \cancel{} - 128 - 1100 - 20\right)$$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 1458/\underbrace{9^3}_{729} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 \overset{!}{=} 0 .$$

Man errät die Lösung $\lambda_1 = 1$.

Polynomdivision: $(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda - 2 \overset{!}{=} 0$

$$\begin{array}{l} -(\lambda^3 - \lambda^2) \\ \hline \quad -\lambda^2 - \lambda \\ \quad -(-\lambda^2 + \lambda) \\ \hline \qquad -2\lambda + 2 \\ \qquad -(-2\lambda + 2) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

Lösungen $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} =$

$= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\lambda_2 = 2 ,\ \lambda_3 = -1 .$

Die Eigenwerte sind $1, 2$ und -1, also $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Eigenräume:

zu $\lambda_1 = 1$:

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

(I) $\frac{-4}{9}x - \frac{10}{9}y - \frac{8}{9}z = 0$	$2x + 5y + 4z = 0$ (I')
(II) $-\frac{10}{9}x - \frac{7}{9}y - \frac{2}{9}z = 0$	$10x + 7y + 2z = 0$ (II')
(III) $-\frac{8}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{2}{9}z = 0$	$8x + 2y - 2z = 0$ (III')

Die dritte Gleichung ist die Differenz der ersten beiden, kann also weggelassen werden.

$(\mathrm{II}') - 5(\mathrm{I}')$: $\quad -18y - 18z = 0$, d.h. $y = -z$

in (I') : $2x + y = 0 \quad -2x = y = -z$, z.B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

> Alle Eigenräume haben mindestens Dimension 1 und, da ihre Dimension höchstens gleich der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts sein kann (in unserem Beispiel stets 1), ~~haben~~ auch tatsächlich Dimension 1.

Also ist der Eigenraum zu λ_1 die Gerade $\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+4} = 3$, also ist $v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ normierter Eigenvektor.

zu $\lambda_2 = 2$:

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l|l}
-\frac{13}{9}x - \frac{10}{9}y - \frac{8}{9}z = 0 & 13x + 10y + 8z = 0 \quad (\mathrm{I}) \\
-\frac{10}{9}x - \frac{16}{9}y - \frac{2}{9}z = 0 & 10x + 16y + 2z = 0 \quad (\mathrm{II}) \\
-\frac{8}{9}x - \frac{2}{9}y - \frac{7}{9}z = 0 & 8x + 2y + 7z = 0 \quad (\mathrm{III})
\end{array}$$

$(\mathrm{I}) - 4(\mathrm{II})$: $\quad -27x - 54y = 0$, d.h. $-2y = x$

$x + 2y = 0$

$2z = -10 \cdot (-2y) - 16y = 4y$

$z = 2y$, z.B. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Der Eigenraum zu λ_2 ist also die Gerade $\left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Ein normierter Eigenvektor ist $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v_2$.

zu $\lambda_3 = -1$:

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{14}{9}x - \frac{10}{9}y - \frac{8}{9}z = 0 & 7x - 5y - 4z = 0 \quad (\mathrm{I}) \\
-\frac{10}{9}x + \frac{11}{9}y - \frac{2}{9}z = 0 & -10x + 11y - 2z = 0 \quad (\mathrm{II}) \\
-\frac{8}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{20}{9}z = 0 & -4x - y + 10z = 0 \quad (\mathrm{III})
\end{array}$$

$(\mathrm{I}) - 2(\mathrm{II}) \quad 27x - 27y = 0$ bzw. $x = y$

in (I) : $\quad 2x = 4z$, d.h. $x = y = 2z$, z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Eigenraum zu λ_3 ist die Gerade $\left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$, ein normierter Eigenvektor ist $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = v_3$.

Da A symmetrisch ist, muss A eine ONB aus Eigenvektoren besitzen; eine solche ONB muss (v_1, v_2, v_3) sein.

Also ist die Matrix

$$S = (v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-1/3 & -2/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

orthogonal und erfüllt $S^T A S = D$.

Da zwei Eigenwerte positiv sind und einer negativ ist, beschreibt die Gleichung $x^T A x = 1$ ein <u>einschaliges Hyperboloid</u> .