Klassifikation der Kurven zweiter Ordnung

1. Fall: [Es treten keine linearen Glieder mehr auf] (d.h. alle $\lambda_i \neq 0$):
entscheidend

$$\boxed{\lambda_1 (y_1 + c_1)^2 + \lambda_2 (y_2 + c_2)^2 + \tilde{c} = 0}$$

Fall 1.1: $\tilde{c} \neq 0$

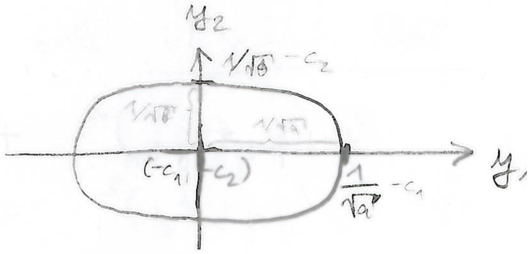
$$\underbrace{-\frac{\lambda_1}{\tilde{c}}}_{a} (y_1 + c_1)^2 \underbrace{- \frac{\lambda_2}{\tilde{c}}}_{b} (y_2 + c_2)^2 = 1,$$ setze $a = -\frac{\lambda_1}{\tilde{c}}$, $b = -\frac{\lambda_2}{\tilde{c}}$.

$$\boxed{a (y_1 + c_1)^2 + b (y_2 + c_2)^2 = 1}$$

Fall 1.1.1: $a > 0$, $b > 0$. Es liegt eine Ellipse vor. Mittelpunkt: $(-c_1, -c_2)$ bzgl. der ONB aus EV,

$$\left(\frac{y_1 + c_1}{\sqrt{a}^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{y_2 + c_2}{\sqrt{b}^{-1}}\right)^2 = 1$$

Halbachsenlängen: $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

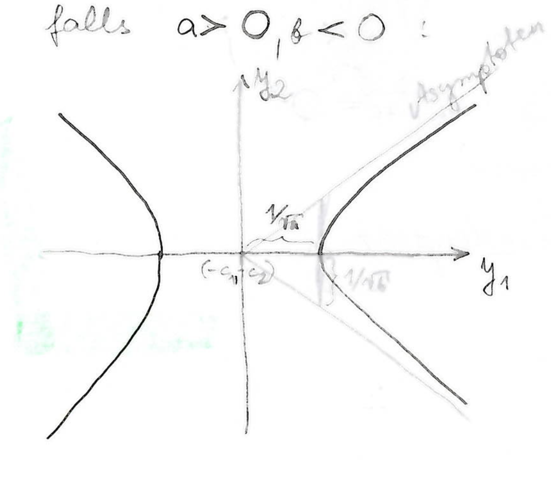


Fall 1.1.2: $a < 0, b > 0$ oder $a > 0, b < 0$.

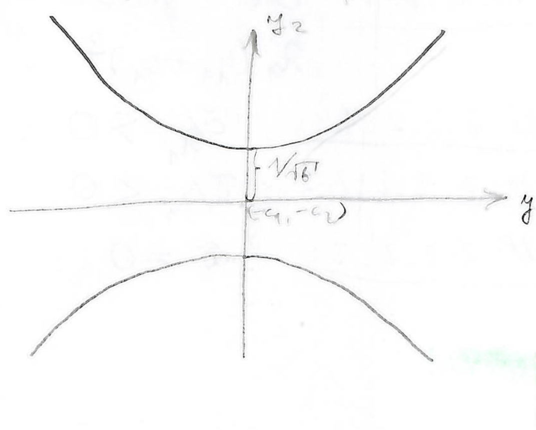
Ende der achten Vorlesg.

Es liegt eine Hyperbel vor.

falls $a > 0, b < 0$:



falls $a < 0, b > 0$:



Fall 1.1.3: $a < 0, b < 0$: Lösungskurve ist leer.

„imaginäre Ellipse"

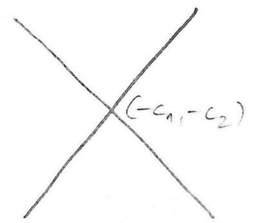
Fall 1.2: $\tilde{c} = 0$

Fall 1.2.1: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ oder $\lambda_1, \lambda_2 < 0$:

Die Lösungskurve ist nur ein Punkt. „imaginäres Geradenpaar" (mit einem reellen Punkt)

Fall 1.2.2: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ oder $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$:

Die Lösungskurve ist ein (reelles) nicht-paralleles Geradenpaar.



Fall 2: [Es treten noch lineare Glieder auf] ($d.h.\ \exists i \in \{1,2\} : \lambda_i = 0$).

entscheidend

Fall 2.1: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Fall 2.1.1: $d_1 = d_2 = 0$, $\tilde{c} \neq 0$: leere Lösungskurve

Fall 2.1.2: $d_1 = d_2 = \tilde{c} = 0$: Lösungskurve ist $\mathbb{R}^2$.

Fall 2.1.3: $(d_1, d_2) \neq (0,0)$: Gerade als Lösungskurve.

Fall 2.2: $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$ bzw. $\lambda_1 \neq 0 = \lambda_2$.

Fall 2.2.1: Das lineare Glied ist $\neq 0$ ($d_i \neq 0$ für $\lambda_i = 0$).

$$\lambda_1 (y_1 + c_1)^2 + d_2 y_2 + \tilde{c} = 0, \quad -d_2\left(y_2 + \frac{\tilde{c}}{d_2}\right) = \lambda_1 (y_1 + c_1)^2$$

bzw. $\lambda_2 (y_2 + c_2)^2 + d_1 y_1 + \tilde{c} = 0$

Es liegt eine Parabel vor.

Scheitelpunkt: $\left(-c_1, -\frac{\tilde{c}}{d_2}\right)$ bzw. $\left(-\frac{\tilde{c}}{d_1}, -c_2\right)$ bzgl. der ONB aus EV von A

Fall 2.2.2: Die Gleichung hat die Form

$$\lambda_1 (y_1 + c_1)^2 + \tilde{c} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_2 (y_2 + c_2)^2 + \tilde{c} = 0$$

Fall 2.2.2.1: $\tilde{c}/\lambda_i > 0$: leere Lösungskurve

Fall 2.2.2.2: $\tilde{c}/\lambda_i < 0$: paralleles Geradenpaar

Fall 2.2.2.3: $\tilde{c} = 0$: Gerade.

Sei $b = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Kegelachse,

o.B.d.A. $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, Kegelspitze, $\varphi \in (0°, 90°)$ halber Öffnungswinkel des Kegels.

<u>Kegelfläche</u>:
$$\frac{\langle x - s, b \rangle}{|x - s| \cdot |b|} = \pm \cos \varphi$$

$$\langle x - s, b \rangle^2 = |x - s|^2 \, |b|^2 \cdot \cos^2 \varphi ,$$

Gleichung der Schnittebene: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es ergibt sich: $c^2 x_1^2 + (c^2 - b_2^2) x_2^2 + 2 b_2 b_3 a x_2 + (c^2 - b_3^2) a^2 = 0$

mit $c^2 = (b_2^2 + b_3^2) \cos^2 \varphi$. Kurve zweiter Ordnung!

<u>Bsp.:</u> $a = 6$, $\varphi = 30°$, $\cos \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $c^2 = \frac{3}{4}(b_2^2 + b_3^2)$, $b_2 = b_3 = 1$, $c^2 = \frac{3}{2}$.

$$\frac{3}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + 12 x_2 + \frac{1}{2} \cdot 36 = 0$$

bzw. $\frac{x_1^2}{36} + \frac{(x_2 + 12)^2}{108} = 1$, Ellipse mit MP $(0, -12)$, HAL $6, 6\sqrt{3}$!

Abiturwissen Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Wolfgang Riemer, Harald Scheid)

<u>Flächen zweiter Ordnung</u>. $x^T A x + b^T x + c = 0$

Durch Hauptachsentransformation wird jede Fläche zw. O.[1] auf eine der folgenden Formen gebracht:

(a)
$$\mu_1 (x_1' + m_1)^2 + \mu_2 (x_2' + m_2)^2 + \mu_3 (x_3' + m_3)^2 = 1 \text{ ~~(ggf. verschoben)~~}$$

- $\boxed{\text{Ellipsoid}}$, falls $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$
- $\boxed{\text{einschaliges Hyperboloid}}$, falls zwei $\mu_i > 0$, einer < 0 ist.
- $\boxed{\text{zweischaliges Hyperboloid}}$, falls ein $\mu_i > 0$, zwei $\mu_i < 0$ sind.

(leere Menge für $\mu_1, \mu_2, \mu_3 < 0$)

(b) $\mu_1 (x_1' + m_1)^2 + \mu_2 (x_2' + m_2)^2 + \mu_3 (x_3' + m_3)^2 = 0$ ($\mu_1, \mu_2, \mu_3 \neq 0$)

- <u>(elliptischer) Kegel</u>, falls μ_i ~~gleiche~~ verschiedene Vorzeichen; $\{0\}$ falls μ_i gleiche Vorzeichen

(IIa) $\underset{\neq 0}{\mu_i}(x_i' + m_i)^2 + \underset{\neq 0}{\mu_j}(x_j' + m_j)^2 = 1, \quad i \neq j$

- elliptischer Zylinder, falls $\mu_i, \mu_j > 0$
- hyperbolischer ~~Zy~~ Zylinder, falls μ_i, μ_j verschiedene Vorzeichen

(– leer für $\mu_i, \mu_j < 0$)

(IIb) $\underset{\neq 0}{\mu_i}(x_i' + m_i)^2 + \underset{\neq 0}{\mu_j}(x_j' + m_j)^2 = 0$

- Gerade, falls μ_i, μ_j gleiches Vorzeichen
- sich schneidende Ebenen, falls μ_i, μ_j versch. Vorz.

(IIIa) $\underset{\neq 0}{\mu_i}(x_i' + m_i)^2 = 1$

- zwei parallele Ebenen für $\mu_i > 0$
- leer für $\mu_i \leq 0$.

(IIIb) $\underset{\neq 0}{\mu_i}(x_i' + m_i)^2 = 0$ Ebene.

~~– Ebene für $\mu_i \neq 0$, $\mathbb{R}^2$ für $\mu_i = 0$.~~

(IV) $\underset{\neq 0}{\mu_i}(x_i' + m_i)^2 + \underset{\neq 0}{\mu_j}(x_j' + m_j)^2 + \nu_k(x_k' + m_k) = 0$ $(i \neq j \neq k \neq i)$

mit $\nu_k < 0$.

- $\boxed{\text{elliptisches Paraboloid}}$, falls $\mu_i \mu_j > 0$
- $\boxed{\text{hyperbolisches Paraboloid}}$ $\mu_i \mu_j < 0$

(V) $\underset{\neq 0}{\mu_i}(x_i' + m_i)^2 + \nu_j(x_j' + m_j) + \nu_k(x_k' + m_k) = 0$ $(i \neq j \neq k \neq i)$

mit $(\nu_j, \nu_k) \neq (0, 0)$. parabolischer Zylinder

(VI) $\mu_1 x_1' + \mu_2 x_2' + \mu_3 x_3' = c$

- Ebene, falls $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \neq (0, 0, 0)$,
- $\emptyset$, falls $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, $c \neq 0$,
- $\mathbb{R}^3$, falls $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = c = 0$.

Hinweis: ~~Der~~ Ein Normalvektor an $x^T A x + b^T x + c = 0$ im Punkt x_0 $(x_0^T A x_0 + b^T x_0 + c = 0)$ lautet $2Ax_0 + b$.

$x_0^T \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) + b^T x_0 + c = \frac{1}{2} b^T x_0 + c = 0$

Tangentialhyperebene: $\langle 2Ax_0 + b, x - x_0 \rangle = 0$.