Probeklausur

LAAG, Lehramt SS 2016

Dauer: $2\frac{1}{2}$ *Stunden*

Hilfsmittel: keine

Teil A

Aufgabe 1

Geben Sie die Definition der Begriffe *Körper* und *Vektorraum* über einem Körper an und beweisen Sie für einen Körper K und einen K-Vektorraum V:

a) Gilt für $\lambda, \mu \in K$ die Gleichung $\lambda\mu = 0$, so folgt $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$.

b) Gilt für $\lambda \in K, v \in V$ die Gleichung $\lambda v = 0$, so folgt $\lambda = 0$ oder $v = 0$.

Aufgabe 2

Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

a) Definieren Sie, unter welcher Bedingung der Endomorphismus φ *normal* heißt.

b) Es sei φ normal. Zeigen Sie $\ker\varphi = \ker\varphi^*$.

Aufgabe 3

Formulieren und beweisen Sie die *Polarisierungsidentität* für einen reellen euklidischen Vektorraum V mit endlicher Dimension.

Aufgabe 4

Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraumes V über einem Körper K, der der Gleichung $f^2 = 0$ genüge. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{id}_V + f$ ein Isomorphismus von V auf V ist. (Dabei ist $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ die Identität.)

Teil B

Aufgabe 5

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist invertierbar. Berechnen Sie ihre Inverse.

Aufgabe 6

Für jedes $\lambda \in \mathbb{Q}$ sei über dem Körper $\mathbb{Q}$ die Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2\lambda & \lambda & \lambda - 1 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Berechnen Sie in Abhängigkeit von λ deren Rang, Determinante und Spur.

Aufgabe 7

Im $\mathbb{R}^3$ spannen die Vektoren $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Parallelogramm auf. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

Aufgabe 8

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ i+1 \end{pmatrix}$ spannen einen zweidimensionalen Unterraum des $\mathbb{C}^3$ auf. Bestimmen Sie zunächst eine Orthonormalbasis des Unterraums, wobei auf $\mathbb{C}^3$ das kanonische Skalarprodukt zugrundegelegt werde. Zeigen Sie, dass $w = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 2 + \frac{i}{2} \end{pmatrix}$ in diesem Unterraum liegt und stellen Sie w als Linearkombination der Vektoren der von Ihnen gefundenen Orthonormalbasis dar.

Aufgabe 9

Die Punkte $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $r = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind Eckpunkte eines Dreiecks im $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie dessen geometrischen Schwerpunkt s.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -10 & 2 & -2 \\ -8 & -2 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Geben Sie eine orthogonale Matrix S derart an, dass die Matrix $D = S^T A S$ Diagonalgestalt hat. Welche Fläche zweiter Ordnung wird durch die Gleichung $x^T A x = 1$ ($x \in \mathbb{R}^3$) beschrieben?