TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie (Modul ALGZTH), Sommersemester 2017

1. Themenblatt für die Übungen vom 10.4.-13.4.2017

Gruppen, Untergruppen

Auf diesem Blatt finden Sie die Themen, die in der Übung vorgestellt werden. Wesentliches Kriterium bei der Präsentation ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.

1. **Halbgruppen für $\mathbb{N}$.**
   Betrachten Sie die natürlichen Zahlen mit den Operationen $\mathrm{kgV} : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bzw. $\mathrm{ggT} : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es sich bei den Strukturen $(\mathbb{N}, \mathrm{kgV})$ und $(\mathbb{N}, \mathrm{ggT})$ um Halbgruppen handelt. Diskutieren Sie weiterhin, ob diese Strukturen kommutativ sind und ob sie ein neutrales Element besitzen.

2. **Monoid $\mathbb{Z}[i]$ in $\mathbb{C}$.**
   Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit der üblichen Multiplikation komplexer Zahlen eine kommutative Halbgruppe bildet. Bestimmen Sie das neutrale Element in $\mathbb{Z}[i]$. Finden Sie alle Einheiten in $\mathbb{Z}[i]$.

   Eine Halbgruppe, die ein neutrales Element enthält, wird *Monoid* genannt.

3. **Gruppentafel.**
   Lassen Sie die Teilnehmer die Verknüpfungstafeln

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b			
c	c		a	
d	d			

$\circ$	x	y	z
x			
y			
z			

   so vervollständigen, dass die Menge $\{a, b, c, d\}$ bzw. $\{x, y, z\}$ mit der Operation $\circ$ eine Gruppe bildet. Gehen Sie dazu vorher auf die Eigenschaften einer Gruppe ein. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Zu welchen bekannten Gruppen sind die Gruppen isomorph?

4. **Die Gruppe $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)$**
   Durch $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 := \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}_4, b \in \mathbb{Z}_2\}$ mit komponentenweiser Addition, d.h.

$$(a, b) + (c, d) := (a + c \pmod 4, b + d \pmod 2)$$

   ist eine Gruppe definiert. Stellen Sie die Gruppentafel auf, finden Sie zu jedem Element sein Inverses und ermitteln Sie alle Untergruppen.

5. **Die Gruppe der 4-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.**
   Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge bzgl. der Multiplikation in $\mathbb{C}$ eine Gruppe G bildet. Am einfachsten geht das über

die Gruppentafel. Wie groß ist die Ordnung der einzelnen Elemente? Welche Elemente erzeugen G?

6. **Symmetriegruppe eines Rechtecks.**
   Bestimmen Sie die Symmetrien eines Rechtecks, das kein Quadrat ist, als Permutationen der Eckpunkte. Diskutieren Sie, warum die Menge dieser Symmetrien mit der Hintereinanderausführung von Funktionen eine Gruppe bilden. Stellen Sie dazu die Gruppentafel auf. Was ändert sich im Spezialfall des Quadrates?

7. **Rubiks Würfel.**
   Wie kann man das Rätsel des Rubiks Würfel mit Gruppentheorie systematisch lösen? Geben Sie einen kleinen Einblick.