TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie (Modul ALGZTH), Sommersemester 2017

2. Themenblatt für die Übungen vom 24.4.-28.4.2017

elementare Zahlentheorie

Auf diesem Blatt finden Sie die Themen, die in der Übung vorgestellt werden. Wesentliches Kriterium bei der Präsentation ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.

1. **Teilbarkeit, Division mit Rest.**
   Beweisen Sie den Satz über die Division mit Rest: Für alle $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$ existieren eindeutig bestimmte $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $r < b$, für die gilt: $a = qb + r$.

   Stellen Sie ein paar Knobelaufgaben zum Thema Teilbarkeit, ggT, kgV.

2. **Teilbarkeitsregeln.**
   Erläutern Sie grundlegende Teilbarkeitsregeln für die Teilbarkeit durch 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 und 11. Diskutieren Sie die Beweis(ideen) und wenden Sie solche Regeln auf eine Aufgabe an.

3. **Unendlich viele Primzahlen.**
   Diskutieren Sie mindestens drei verschiedene Beweise/Beweisideen dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt (s. 'Buch der Beweise" von Aigner und Ziegler).

4. **Fermat-Primzahlen und Mersenne-Primzahlen.**
   Definieren Sie die Begriffe Fermatsche Zahl und Fermatsche Primzahl und beweisen Sie, dass verschiedene Fermat-Zahlen teilerfremd sind.
   Definieren Sie den Begriff Mersenne-Primzahl und zeigen Sie: Ist $2^n - 1$ prim, dann ist auch n prim.

5. **Euklidischer Algorithmus.**
   Diskutieren Sie den Beweis dafür, dass mittels des euklidischen Algorithmus der ggT zweier natürlicher Zahlen berechnet wird. Begründen Sie, dass mit Hilfe des in der Übung vorgestellten Schemas zum erweiterten Euklidischen Algorithmus tatsächlich der ggT zweier Zahlen als Linearkombination dieser Zahlen errechnet wird. Erläutern Sie, dass diese Linearkombination nicht eindeutig ist.

6. **Lineare Kongruenzen.**
   Führen Sie den Begriff ein und diskutieren Sie die Lösbarkeit. Lösen Sie die lineare Kongruenz $32x \equiv 14 \pmod{86}$.

7. **Fibonacci-Zahlen.**
   Betrachten Sie die Fibonacci-Zahlen, die

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots \quad \text{mit } f_1 = 1, f_2 = 1$$

rekursiv definiert sind und erläutern Sie ihre Bedeutung.
Wählen Sie zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen f_i und f_{i+1} und berechnen Sie deren ggT als Linearkombination von f_i und f_{i+1}.
Zeigen Sie (z.B. durch Induktion), dass zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen f_n und f_{n+1} teilerfremd sind und insbesondere die Beziehung $(-1)^n = f_{n-1} \cdot f_n - f_{n-2} \cdot f_{n+1}$ (für alle $n > 2$) für ihre Linearkombination gilt.