TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie (Modul ALGZTH), Sommersemester 2017

3. Themenblatt für die Übungen vom 8.5.-12.5.2017

Gruppentheorie

Auf diesem Blatt finden Sie die Themen, die in der Übung vorgestellt werden. Wesentliches Kriterium bei der Präsentation ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.

1. **Untergruppenkriterium für endliche Gruppen**
   Eine Untergruppe $(U, \circ)$ einer Gruppe $(G, \circ)$ ist bekanntlich definiert (siehe VL 1.5) als nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$, die abgeschlossen ist unter:
   (UG1) der Gruppenverknüpfung $\circ$ und
   (UG2) der Inversenbildung.
   Zeigen Sie, dass es für endliche Gruppen ausreicht, Bedingung (UG1) zu fordern, d.h. beweisen Sie, dass aus (UG1) bereits (UG2) folgt. Dazu müssen Sie zuerst begründen, dass U das neutrale Element e von G enthält.

2. **Die alternierende Gruppe A_n**
   Erinnern Sie an die Definition der symmetrischen Gruppe S_n. Erklären Sie den Begriff einer *Transposition* und definieren Sie damit *gerade* Permutationen. Beweisen Sie, dass die Menge der geraden Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$ eine Untergruppe $A_n \subseteq S_n$ bildet. Wie viele Elemente hat A_n?

3. **Untergruppenordnungen der alternierenden Gruppe A_4**
   Stellen Sie - zusammen mit dem Auditorium - die Gruppentafel der alternierenden Gruppe A_4 auf. Bestimmen Sie die Ordnungen der Elemente von A_4. Nutzen Sie dies, um alle Untergruppen von A_4 zu finden. Verifizieren Sie, dass nicht zwangsläufig alle Teiler m der Gruppenordnung n als Untergruppenordnungen tatsächlich vorkommen.

4. **Der Satz von Euler-Fermat**
   Beweisen Sie den Satz von Euler-Fermat (siehe VL 2.17)
   $$\mathrm{ggT}(a, n) = 1 \implies a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$
   Zeigen Sie, wie sich mit Hilfe dieses Satzes hohe Potenzen von Elementen $a \in \mathbb{Z}_n$ eines Restklassenrings $\mathbb{Z}_n$ effizienter berechnen lassen. Stellen Sie den Algorithmus anhand der Beispiels $5^{201} \pmod{18}$ vor.

5. **Isomorphie.**
   Diskutieren Sie, welche der Gruppen
   $$(D_6, \circ), \qquad (\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3, +), \qquad (\mathbb{Z}_{12}, +), \qquad (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3, +), \qquad (\mathbb{Z}_{13} \backslash \{0\}, \cdot)$$
   zueinander isomorph sind. Nutzen Sie dazu z.B. die Eigenschaften: kommutativ und zyklisch.

6. **Bahn & Stabilisator.**
Es sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe und $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ ihre Automorphismengruppe (kurz $S = \mathrm{Aut}(G)$). Für ein $x \in G$ sind die *Bahn* x^S und der *Stabilisator* S_x defniniert durch

$$x^S := \{\sigma(x) \mid \sigma \in S\}, \qquad S_x := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(G) \mid \sigma(x) = x\}.$$

Zeigen Sie, dass

- für alle $a, b \in x^S$ stets ein $\sigma \in S$ mit $b = \sigma(a)$ existiert.
- der Stabilisator S_x eine Untergruppe von $(S, \circ)$ bildet.