



## 4. Themenblatt für die Übungen vom 22.5.-26.5.2017

### *Ringe*

Auf diesem Blatt finden Sie die Themen, die in der Übung vorgestellt werden. Wesentliches Kriterium bei der Präsentation ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.

Falls Sie Material oder Hilfe zur Vorbereitung benötigen, kontaktieren Sie bitte Ihren Übungsleiter.

#### 1. **Körper mit vier Elementen.**

Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau einen Körper  $\mathbb{K}$  mit vier Elementen gibt. Nennen Sie dazu wie üblich das Nullelement 0 und das Einselement 1 und setzen Sie  $\mathbb{K} = \{0, 1, a, b\}$ . Lassen Sie die Operationstabellen für  $(\mathbb{K}, +)$  (Addition) und  $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  (Multiplikation) aufstellen, indem alle Eigenschaften eines Körpers genutzt werden. Insbesondere ergibt sich dabei:  $1 + 1 = 0$ .

#### 2. **Integritätsring.**

Sprechen Sie den Begriff der Nullteilerfreiheit kurz durch. Geben Sie zwei Beispiele für nullteilerfreie Ringe an. Betrachten Sie dann den Ring  $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$  mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation reeller Zahlen. Lassen Sie die Teilnehmer nachweisen, dass der Ring für  $n > 1$  Nullteiler besitzt.

#### 3. **Polynom vs. Polynomfunktion.**

Erläutern Sie den Satz II.2.4 (Universelle Eigenschaft des Polynomrings) und weisen Sie auf den Unterschied zwischen den Begriffen „Polynom“ und „Polynomfunktion“ hin. Skizzieren Sie den Beweis und geben Sie ein Beispiel an.

#### 4. **Die Eulersche $\phi$ -Funktion & RSA-Verschlüsselung.**

Definieren Sie die Funktion, und stellen Sie das RSA-Verschlüsselungsverfahren vor. Rechnen Sie ein Beispiel mit kleinen Zahlen.

#### 5. **Multiplikative zahlentheoretische Funktionen.**

Definieren Sie den Begriff und stellen Sie das Beispiel der Möbiusfunktion vor.

#### 6. **Chinesischer Restsatz.**

Diskutieren Sie den Satz anhand (anschaulicher) Beispiele.