TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften** Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie (Modul ALGZTH), Sommersemester 2017

# 5. Themenblatt für die Übungen vom 19.6.-23.6.2017

*Zahlentheorie und Ringe*

Auf diesem Blatt finden Sie die Themen, die in der Übung vorgestellt werden. Wesentliches Kriterium bei der Präsentation ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.
Falls Sie Material oder Hilfe zur Vorbereitung benötigen, kontaktieren Sie bitte Ihren Übungsleiter.

1. **Modulrechnung & Summen von zwei Quadraten.**
   Welchen Abstand können zwei Gitterpunkte des karierten Papiers haben?
   Führen Sie die Frage darauf zurück, welche natürlichen Zahlen Summen zweier Quadrate sind, und diskutieren Sie einen Teil der Beweisidee.

2. **Pythagoräisches Tripel.**
   Erklären Sie den Begriff und leiten Sie eine Formel zur Bestimmung aller dieser Tripel her. Schauen Sie dabei auch auf die Historie dieser Zahlentripel (Welche dieser Tripel werden z.B. babylonisch genannt und warum?).

3. **Primzahlzwillinge, -drillinge und -vierlinge.**
   Definieren Sie die Begriffe, betrachten Sie Beispiele und gehen Sie auf interessante Eigenschaften ein.

4. **„kleine" irreduzible Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$.**
   Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$ vom Grad höchstens 3. Nutzen Sie dazu das Korollar II.2.7. Geben Sie außerdem ein reduzibles Polynom in $\mathbb{F}_2[X]$ ohne Nullstelle an. Welchen Grad muss ein solches Polynom mindestens besitzen?

5. **$\mathbb{Z}$ als faktorieller Ring**
   Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ ein faktorieller Ring ist, d.h. zeigen Sie, dass in $\mathbb{Z}$ jede Zahl eine Primfaktorzerlegung besitzt. Ist auch $\mathbb{N}$ ein faktorieller Ring? Zeigen Sie, dass die Primfaktorzerlegung jeder ganzen Zahl $z$ $e$indeutig ist (das ist die Aussage von Satz II.7.6)

6. **Der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$**
   Nach Bsp. II.8.8 ist $\mathbb{Q}$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$. Motivieren und erklären Sie die Einführung von Quotientenkörpern anhand dieses Beispiels. Kann durch eine ähnliche Konstruktion auch $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$ konstruiert werden?