TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie (Modul ALGZTH), Sommersemester 2017

6. Themenblatt für die Übungen vom 3.7.-6.7.2017

irreduzible Polynome, Körper

Auf diesem Blatt finden Sie die Themen, die in der Übung vorgestellt werden. Wesentliches Kriterium bei der Präsentation ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.
Falls Sie Material oder Hilfe zur Vorbereitung benötigen, kontaktieren Sie bitte Ihren Übungsleiter.

1. **Rationale Funktionen**
   Geben Sie eine Definition der in der Schule besprochenen „rationalen" Funktionen, vergessen Sie dabei nicht den Definitionsbereich. Überlegen Sie, dass rationale Funktionen „mehr oder weniger" aus dem Quotientenkörper von $\mathbb{R}[X]$ via einer Auswertungsabbildung φ ähnlich des Auswertungshomomorphismus für Polynome (VL II.2.5) hervorgehen. Erinnern Sie daran, dass nicht gekürzte Brüche über $\mathbb{R}[X]$ üblicherweise Lücken im Definitionsbereich aufweisen, so dass die Äquivalenzrelation (VL II.8.3) zur Definition von Quotientenkörpern beim Übergang zu rationalen Funktionen verloren geht.

2. **Nullstellensuche mit dem Lemma von Gauß.**
   Erläutern Sie das Lemma von Gauß (VL II.9.5+II.9.7) und erklären Sie (siehe VL II.10.3), wie mit dessen Hilfe und dem Satz von Vieta (Schulmathematik) gezeigt werden kann, dass ein Polynom keine rationalen Nullstellen besitzt. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^5 + 3X^4 + 6X^3 + 9X^2 + 12X + 15$ keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ hat.

3. **Das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium.**
   Erläutern Sie das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium (VL II.10.5) und begründen Sie dessen Richtigkeit. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^5 + 2X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 8X + 10$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist, also insbesondere keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ hat.

4. **Das Reduktionskriterium zur Irreduzibilitätsprüfung.**
   Erläutern Sie die Reduktionsmethode zur Irreduzibilitätsprüfung (VL II.10.4). Beweisen Sie, dass das Polynom $X^4 + X^3 + X^2 + 10$ keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ hat.

5. **Rechnen in Ringen und Körpern.**
   Zeigen Sie, dass die folgenden „Rechenregeln" in jedem Körper $\mathbb{K}$ (und sogar allgemeiner in jedem Ring) gelten. Nutzen Sie dazu nur die Körper- bzw. Ringaxiome!

   - $\forall x \in \mathbb{K} : 0 \cdot x = 0$
   - $\forall x \in \mathbb{K} : (-1) \cdot x = -x$
   - $(-1) \cdot (-1) = 1$
   - $\forall x \in \mathbb{K} : (x^{-1})^{-1} = x.$

6. **Ein Körper mit 8 Elementen.**
   Finden Sie ein irreduzibles Polynom $f(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ vom Grad 3. Erläutern Sie, dass der Faktorring $\mathbb{F}_2[X]/(f(X))$ ein Körper ist. Wie viele Elemente besitzt er? Stellen Sie gemeinsam mit dem Auditorium die Tafeln für Addition und Multiplikation auf.

   Finden Sie außerdem eine Primitivwurzel in dem Körper, d.h. ein Element $\alpha \in \mathbb{F}_2[X]/(f(X))$ mit $\langle \alpha \rangle = (\mathbb{F}_2[X]/(f(X)))^\times$