TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften** Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie (Modul ALGZTH), Sommersemester 2017

# 3. Übungsblatt für die Übungen vom 2.5.-5.5.2017

*Normalteiler, Quotientengruppen, Homomorphismen*

V17. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Es sei $GL_n(\mathbb{K})$ die Gruppe aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$ und $SL_n(\mathbb{K})$ die Gruppe aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$, deren Determinante 1 ist. Zeigen Sie, dass $SL_n(\mathbb{K})$ eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{K})$ ist. Bestimmen Sie die Links- und die Rechtsnebenklassen von $SL_n(\mathbb{K})$ in $GL_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass $SL_n(\mathbb{K})$ ein Normalteiler von $GL_n(\mathbb{K})$ ist und geben Sie eine „möglichst kanonische“ Gruppe an, die isomorph zur Faktorgruppe $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$ ist.

Ü18. (a) Bestimmen Sie für die Diedergruppe $D_4$ alle Normalteiler.

(b) Geben Sie zu jedem Normalteiler $N$ von $D_4$ die Elemente der Faktorgruppe $D_4/N$ und die zugehörige Verknüpfungstafel an. Geben Sie den natürlichen Homomorphismus $\pi_N : D_4 \to D_4/N$ konkret an.

Ü19. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $U$ Untergruppe einer Gruppe $G$ mit $(G:U) = 2$, dann ist $U$ Normalteiler von $G$.

(b) Beweisen Sie: Ist $N$ ein endlicher zyklischer Normalteiler einer Gruppe $G$, dann sind alle Untergruppen von $N$ auch Normalteiler von $G$.

(c) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Bedingung “zyklisch” nicht weggelassen werden darf, d.h. finden Sie eine Untergruppe $U$ eines Normalteilers $N$ einer Gruppe $G$, so dass $U$ kein Normalteiler von $G$ ist.

Ü20. Verifizieren Sie den ersten Isomorphiesatz (siehe VL 3.10) in der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ anhand der Untergruppe $n\mathbb{Z}$ und des Normalteilers $m\mathbb{Z}$ (für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$) und schlussfolgern Sie, dass $\mathrm{ggT}(m,n) \cdot \mathrm{kgV}(m,n) = m \cdot n$ gilt.

**Bitte wählen Sie 2 der folgenden 3 Hausaufgaben zur Abgabe aus.**

A21. **Hausaufgabe, bitte bis zum 10.5.2017, 12:00 Uhr, 12:00 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Verifizieren Sie die Aussage des ersten Isomorphiesatzes (VL 3.10): Wählen Sie dazu $G := S_3 \times \mathbb{Z}_6$, $N := \langle ((123), 0), ((123), 2) \rangle$, $H := \langle ((123), 3), ((12), 3) \rangle$.

(a) Begründen Sie, dass $H$ eine Untergruppe und $N$ ein Normalteiler von $G$ sind. Geben Sie (mit Begründung) die Ordnungen von $N$ und $H$ an.

(b) Bestimmen Sie die Faktorgruppen $G_1 := H/(H \cap N)$ und $G_2 := HN/N$.

(c) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen $G_1$ und $G_2$ konkret an (mit Begründung).

A22. **Hausaufgabe, bitte bis zum 10.5.2017, 12:00 Uhr, 12:00 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Bestimmen Sie die Automorphismengruppe der Klein'schen Vierergruppe $V_4$.

Hinweis: Diese Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

A23. **Hausaufgabe, bitte bis zum 10.5.2017, 12:00 Uhr, 12:00 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Beweisen Sie: Charakteristische Untergruppen von Normalteilern einer Gruppe sind selbst Normalteiler.

H24*. Zeigen Sie: Die Gruppe $(\mathbb{Z}_2^n, +)$ besitzt

$$k_r := \frac{\prod_{i=0}^{r-1}(2^n - 2^i)}{\prod_{i=0}^{r-1}(2^r - 2^i)}$$

Untergruppen der Ordnung $2^r$ $(r \leq n)$.

Hinweis: Sie können ausnutzen, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}_2^n, +)$ auch ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum (mit der Multiplikation $\pmod 2$ als Skalarmultiplikation) ist. Überlegen Sie zuerst, dass die Untergruppen genau den Untervektorräumen entsprechen.

H25. (a) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ und $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen (der Ordnung 8) paarweise nicht isomorph sind:
(i) die Quaternionengruppe $Q_8$ (siehe H14),
(ii) die Diedergruppe $D_4$ (siehe Ü18)
(iii) die Gruppe $\mathbb{Z}_2^3$
(iv) die Gruppe $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$,
(v) die Gruppe $(\mathbb{Z}_8, +)$

Hinweis: Das sind - bis auf Isomorphie - alle Gruppen der Ordnung 8.

(c) Zu welchen dieser Gruppen ist die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ (siehe V7(c)) isomorph? Warum?

H26. Das *Zentrum* $Z(G)$ einer Gruppe $G$ (siehe VL 3.14) besteht aus allen Elementen $x \in G$ mit $\forall g \in G : gx = xg$.

(a) Zeigen Sie: $Z(G)$ ist ein Normalteiler von $G$.

(b)* Bestimmen Sie $Z(D_n)$ für alle $n > 2$ ($D_n$ bezeichnet die Diedergruppen).

(c)* Zeigen Sie, dass $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$ für alle symmetrischen Gruppen $S_n$ mit $n > 2$ gilt.