Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Dr. E. Lehtonen, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2018

2. Übungsblatt für die Übungen vom 16.4.-20.4.2018

Die natürlichen Zahlen

T2.1 **Themenaufgabe**

Begründen Sie, dass die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ eine totale Ordnungsrelation ist.

Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl außer Null einen Vorgänger hat.

T2.2 **Themenaufgabe**

Ziel dieses Vortrages ist es, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

mit vollständiger Induktion zu beweisen. Dazu muss zuerst der Begriff des Binomialkoeffizienten geklärt werden. Für eine Eigenschaft der Binomialkoeffizienten, die dabei benötigt wird, ist das Pascalsche Dreieck zu Rate zu ziehen.

Ü2.3 Welche der folgenden Strukturen, bestehend aus Grundmenge, Nachfolgerfunktion und Nullelement, erfüllen die Peano-Axiome? Welches Axiom ist ggf. verletzt?

(a) $(\mathbb{N} \cup \{-5,-4,-3,-2,-1\}, N, -5)$ mit $N(a) := a+1$,

(b) $(\mathbb{Z}, N, 0)$ mit $N(a) := a+1$,

(c) $(\mathbb{Z}, N', 0)$ mit $N'(a) := \begin{cases} -a+1, & a \leq 0 \\ -a, & a > 0 \end{cases}$

(d) $(\{0,1,\dots,1000\}, \tilde{N}, 0)$ mit $\tilde{N}(a) := \begin{cases} a+1, & a < 1000 \\ 1, & a = 1000 \end{cases}$

(e) $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, \hat{N}, 1)$ mit $\hat{N}(a) := 2a$,

Hinweis: Diejenigen Strukturen, die die Peano-Axiome erfüllen, sind Modelle für die natürlichen Zahlen, d.h. sie „verhalten sich ebenso“ wie die natürlichen Zahlen.

Ü2.4 Zeigen Sie mittels des Induktionsaxioms von Peano und der in der Vorlesung gegebenen rekursiven Definitionen von Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}$, dass gilt:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \ 0 + n = n.$$

Ü2.5 Zeigen Sie mittels des Induktionsaxioms von Peano und der in der Vorlesung gegebenen rekursiven Definitionen der Addition in $\mathbb{N}$, dass folgende Eigenschaften gelten:

(a) $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n+m)' = n' + m$.

(b) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m = m + n$.

A2.6 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name und Matrikelnr.) bis 20.4.2018, 12:00 Uhr**
Zeigen Sie folgende Eigenschaften der natürlichen Zahlen mittels der Peano-Axiome und der in der Vorlesung gegebenen rekursiven Definitionen von Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}$:

(a) Die Linkskürzbarkeit der Addition: $\forall l, m, n \in \mathbb{N} : m + n = m + l \implies n = l$.

(b) Die Kommutativität der Multiplikation: $\forall m, n \in \mathbb{N} : mn = nm$.

Hinweis: Hier könnte es zweckmäßig sein, zuerst die Aussage $\forall m, n \in \mathbb{N} : m'n = mn + n$ zu zeigen.

H2.7 Mit $H(n)$ bezeichnen wir folgende Aussage: Hat in einer Menge von n Mädchen eines blaue Augen, dann haben alle n Mädchen aus der Menge blaue Augen.

Wo steckt der Fehler im folgenden „Beweis“ durch vollständige Induktion?

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : H(n)$.

„Beweis“:

(a) Induktionsanfang: $H(1)$ ist offenbar richtig.

(b) Induktionsschritt: $H(n)$ sei wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, wir zeigen die Richtigkeit von $H(n+1)$: Wir betrachten $n+1$ Mädchen (bezeichnet mit $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$), von denen eins ($M_1$) blauäugig sein soll. Die beiden Mengen $\{M_1, \ldots, M_n\}$ und $\{M_1, \ldots, M_{n-1}, M_{n+1}\}$ enthalten jeweils das Mädchen M_1 und besitzen je n Elemente, bestehen also nach Induktionshypothese aus lauter blauäugigen Mädchen. Da alle Mädchen in einer der Mengen vorkommen, sind also alle Mädchen blauäugig.

H2.8 (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für die Anzahl $d(n)$ der Diagonalen eines ebenen, konvexen n-Ecks gilt $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Die Summe der Innenwinkel eines natürlichen n-Ecks ($n > 2$) beträgt $\pi(n-2)$.

H2.9 Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i \qquad$ (d.h. $(a-b) | (a^n - b^n)$),

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \nmid n \implies a^n + b^n = (a+b) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a^{n-1-i} b^i \qquad$ (d.h. $(a+b) | (a^n + b^n)$),

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 | n \implies a^n - b^n = (a+b) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a^{n-1-i} b^i \qquad$ (d.h. $(a+b) | (a^n - b^n)$).