TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Dr. E. Lehtonen, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2018

4. Übungsblatt für die Übungen vom 30.4.-4.5.2018

Division mit Rest, ggT und kgV

Die Übung am Dienstag entfällt, bitte besuchen Sie eine der anderen Übungen.

T4.1 **Themenaufgabe: Pythagoräisches Tripel**

Erklären Sie den Begriff und leiten Sie eine Formel zur Bestimmung aller dieser Tripel her. Schauen Sie dabei auch auf die Historie dieser Zahlentripel (Welche dieser Tripel werden z.B. babylonisch genannt und warum?).

T4.2 **Themenaufgabe: Teilbarkeit, Division mit Rest**

Beweisen Sie den Satz über die Division mit Rest: Für alle $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$ existieren eindeutig bestimmte $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $r < b$, für die gilt: $a = qb + r$.

Stellen Sie ein paar Knobelaufgaben zum Thema Teilbarkeit, ggT, kgV.

Ü4.3 (a) Berechnen Sie zu den angegebenen Paaren (a, b) den größten gemeinsamen Teiler und stellen Sie diesen als ganzzahlige Linearkombination von a und b (d.h. als $\mathrm{ggT}(a, b) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) dar. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse!

(i) $a = 24, b = 135$, (ii) $a = 21, b = 34$ (iii) $a = 94, b = 127$, (iv) $a = 511, b = 1001$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(150, 105), 56) = \alpha \cdot 150 + \beta \cdot 105 + \gamma \cdot 56$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ die Beziehung $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a, b), c) = \mathrm{ggT}(a, \mathrm{ggT}(b, c))$ erfüllen.

Ü4.4 (a) Begründen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Summe

$$s := n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4)$$

keine Primzahl ist. Finden Sie alle $n \in \mathbb{N}$, so dass s genau 3 Teiler hat.

(b) Zeigen Sie: Gilt $n, m \in \mathbb{N}$ und ist m gerade, dann ist die Summe

$$s^* = \sum_{i=0}^{m} (n + i) = n + (n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + m)$$

durch $m + 1$ teilbar.

Ü4.5 (a) Es seien $a, b, d \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie, dass die *lineare diophantische Gleichung*

$$ax + by = d \tag{1}$$

genau dann mit $x, y \in \mathbb{Z}$ lösbar ist, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) \mid d$ gilt.

Zeigen Sie weiterhin, dass wenn $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ mit $ax_0 + by_0 = \mathrm{ggT}(a, b)$ ist, die Menge aller Lösungen von (1) beschrieben ist durch

$$\left\{ \left(\frac{dx_0 + bt}{\mathrm{ggT}(a, b)}, \frac{dy_0 - at}{\mathrm{ggT}(a, b)} \right) \mid t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(b) Bestimmen Sie die vollständige Lösungsmenge der linearen diophantischen Gleichung

$$135x + 74y = 67.$$

A4.6 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name und Matrikelnr.) bis 4.5.2018, 12:00 Uhr**

(a) Ein Fahrzeug kann durch zwei Befehle gesteuert werden: Auf den Befehl **V** hin fährt es genau 143 cm vorwärts, auf den Befehl **R** hin fährt es genau 231 cm rückwärts. Man soll das Fahrzeug durch eine Kombination dieser Befehle um genau einen Meter vorwärts bewegen, aber das erweist sich als unmöglich. Geben Sie einen Grund dafür an, finden Sie die bestmögliche Näherung, d.h. finden Sie einen Punkt, der möglichst nahe an einem Meter liegt und vom Fahrzeug erreicht werden kann und geben Sie an, wieviele Befehle **V** und **R** man kombinieren muss, um diese Näherung zu erreichen.

(b) Ein Fahrzeug auf einer Kreisbahn bewegt sich jedesmal, wenn eine Taste gedrückt wird, um genau 143 Grad weiter auf dem Kreis. Wie oft muss man die Taste drücken, damit das Fahrzeug danach genau ein Grad neben seinem Ausgangspunkt steht?

H4.7 Finden Sie eine Teilbarkeitsregel für 3 im Binärsystem.

Hinweis: Sie sollen also eine möglichst einfache Regel finden, mit der eine im Binärsystem vorliegende natürliche Zahl n auf ihre Teilbarkeit durch 3 überprüft werden kann. Zur Aufgabe gehört natürlich auch, dass Sie die Gültigkeit Ihrer Regel beweisen.

H4.8 (a) Bert möchte gern 0,2 Liter Wasser aus dem Wasserhahn in ein mehr als 2 Liter messendes Gefäß abmessen. Er hat allerdings nur zwei Flaschen, die 1,25 Liter bzw. 0,7 Liter fassen (sowie einen Trichter, um ggf. Wasser aus dem Gefäß in eine der Flaschen zu gießen). Wie kann er das anstellen?

(b) Kann Bert die Aufgabe auch lösen, wenn er eine Flasche zu 1,25 Liter und ein zu 1 Liter hat?

Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe unter Zuhilfenahme des erweiterten Euklidischen Algorithmus.

H4.9 Analysieren Sie die beiden folgenden Behauptungen und ihre Beweise. Finden Sie den grundsätzlichen Fehler im Aufbau des ersten „Beweises“. Warum ist der zweite Beweis im Gegensatz zum ersten tatsächlich beweiskräftig?

<u>1. Behauptung:</u> Es gilt $1 = 2$.

<u>Beweis:</u> Es sei

$$1 = 2.$$

Wir subtrahieren 3/2 auf beiden Seiten und erhalten

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Nun quadrieren wir auf beiden Seiten:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Dies ist eine wahre Aussage, damit ist die Behauptung richtig.

<u>2. Behauptung:</u> Für jede natürliche Zahl a gilt: $4|a \implies 4|a^2$.

<u>Beweis:</u> Nach Voraussetzung existiert eine natürliche Zahl b mit $4 \cdot b = a$.

Nun quadrieren wir auf beiden Seiten: $(4b)^2 = a^2$.

Wir klammern links eine 4 aus, also $4 \cdot 4b^2 = a^2$.

Da $4b^2$ wieder eine natürliche Zahl ist, folgt die Behauptung $4|a^2$.