TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Dr. E. Lehtonen, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2018

5. Übungsblatt für die Übungen vom 7.5.-11.5.2018

Primzahlen, Primfaktorzerlegung

Ein wesentliches Kriterium bei der Präsentation der folgenden Themen ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.

T5.1 **Themenaufgabe: Teilerdiagramm**

Erläutern Sie allgemein den Aufbau des Teilerdiagrammes einer natürlichen Zahl n. Besprechen Sie den Zusammenhang zu einem Teilerdiagramm einer natürlichen Zahl m, die Teiler von n bzw. die Vielfaches von n ist. Verwenden Sie dazu geeignete Beispiele.

T5.2 **Themenaufgabe: unendlich viele Primzahlen**

Diskutieren Sie mindestens drei verschiedene Beweise/Beweisideen dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt (s. „Buch der Beweise“ von Aigner und Ziegler).

Ü5.3 (a) Zeigen Sie: Ist n keine Primzahl, dann ist auch $2^n - 1$ keine Primzahl.

Hinweis: Gilt $n = a \cdot b$, dann zeigen Sie $2^a - 1 | 2^n - 1$.

Um große Primzahlen zu finden, werden als Kandidaten Zahlen der Form $2^n - 1$ betrachtet. U.a. wegen obiger Eigenschaft lassen sich solche Zahlen besser auf Primalität untersuchen.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ keine Primzahl und für den kleinsten Primfaktor p von n gelte $p^3 > n$. Zeigen Sie, dass dann n/p eine Primzahl ist.

Ü5.4 Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Mit $P = \{p_1, \ldots, p_r\}$ bezeichnen wir die Menge aller Primzahlen, die a oder b teilen. Dann existieren für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ eindeutig bestimmte $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$ mit:

$$a = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \qquad \text{und} \qquad b = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i}.$$

Zeigen Sie:

(a) $a \cdot b = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i+\beta_i}$

(b) $a \mid b \iff \forall i \in \{1, \ldots, r\} : \alpha_i \leq \beta_i$

(c) $\operatorname{ggT}(a, b) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}}$

(d) $\operatorname{kgV}(a, b) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\max\{\alpha_i,\beta_i\}}$

Ü5.5 (a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $\operatorname{ggT}(m, n)$ und das kleinste gemeinsame Vielfache $\operatorname{kgV}(m, n)$ der beiden Zahlen $m = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ und $n = 396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$. Bilden Sie die Produkte $m \cdot n$ und $\operatorname{ggT}(m, n) \cdot \operatorname{kgV}(m, n)$. Was stellen Sie fest?

(b) Beweisen Sie: Für je zwei natürliche Zahlen m, n gilt $m \cdot n = \operatorname{ggT}(m, n) \cdot \operatorname{kgV}(m, n)$.

A5.6 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name und Matrikelnr.) bis 11.5.2018, 12:00 Uhr**

(a) Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer auf; die zweite, dritte, vierte und fünfte Ziffer bilden (als 4-stellige Dezimalzahl gelesen) die Zahl x.

Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von x. Zeichnen Sie ein Teilerdiagramm aller Teiler von x und bestimmen Sie die Anzahl der Teiler.

(b) Finden Sie alle natürlichen Zahlen n, die genau 6 Teiler haben und durch 6 teilbar sind.

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen der Festigung und Vertiefung des Stoffes in der Nachbereitung der Lehrveranstaltung.

H5.7 (a) Finden Sie alle natürlichen Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$, für die $y^3 - x^3 = 721$ gilt.

(b) Für welche Primzahlen p ist $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ durch 24 teilbar?

(c) Zeigen Sie, dass $n^5 - 5n^3 + 4n$ für jede natürliche Zahl n durch 120 teilbar ist.

Hinweis: Zerlegen Sie zunächst $n^5 - 5n^3 + 4n$ in geeignete Faktoren.

H5.8 Finden Sie die kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$p|n \iff (p-1)|n \qquad \text{für alle Primzahlen } p.$$

Hinweis: Solch eine Zahl gibt es wirklich. Allerdings ist das Finden der Lösung durch pures Probieren sehr aufwendig. Falls Sie (bei 1 beginnend) pro Zahl 1 Minute zum Überprüfen brauchen, werden Sie n erst nach mehr als einem Tag finden.

H5.9 Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n^2 - n + 41$. Bestimmen Sie $f(n)$ für alle $n \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ und überzeugen Sie sich davon, dass $f(n)$ in jedem Fall eine Primzahl ist. Beweisen oder widerlegen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $n^2 - n + 41$ eine Primzahl.