Dr. E. Lehtonen, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2018

9. Übungsblatt für die Übungen vom 11.6.-15.6.2018

Halbgruppen, Monoide, Gruppen

Ein wesentliches Kriterium bei der Präsentation der folgenden Themen ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.

T9.1 **Themenaufgabe: Halbgruppen für $\mathbb{N}$.**
Betrachten Sie die natürlichen Zahlen mit den Operationen $\mathrm{kgV} : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bzw. $\mathrm{ggT} : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es sich bei den Strukturen $(\mathbb{N}, \mathrm{kgV})$ und $(\mathbb{N}, \mathrm{ggT})$ um Halbgruppen handelt. Diskutieren Sie weiterhin, ob diese Strukturen kommutativ sind und ob sie ein neutrales Element besitzen.

T9.2 **Themenaufgabe: Die Gruppen $(\mathbb{Z}_p, +)$ und $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$.**
Diskutieren Sie Eigenschaften der Gruppen $(\mathbb{Z}_p, +)$ und $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$, für eine Primzahl p am Beispiel $p = 5$. Stellen Sie dazu die Gruppentafeln auf, finden Sie zu jedem Element sein Inverses und ermitteln Sie jeweils alle Untergruppen.

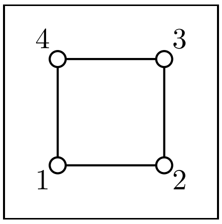
Ü9.3 Überprüfen Sie, ob die folgenden Paare Halbgruppen, Monoide bzw. Gruppen sind.

(a) $(2\mathbb{Z}, *)$, dabei ist $2\mathbb{Z}$ die Menge der geraden ganzen Zahlen.

(b) $(\mathbb{Z}, *)$ mit $x * y := x + y + 2$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$ mit $x * y := xy + x + y$.
Wie lauten die Inversen von $\frac{1}{2}$ und von $\frac{3}{4}$?

Ü9.4 Welche Bewegungen der Ebene bilden ein Quadrat auf sich selbst ab? Beschreiben Sie diese durch Permutationen der Knotenmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ des rechts gegebenen Quadrats. Mit der Hintereinanderausführung bilden die Permutationen eine Gruppe, die *Diedergruppe* $\mathbf{D_4}$. Stellen Sie eine Gruppentafel auf. Geben Sie zu jedem Element sein Inverses an und bestimmen Sie seine Ordnung.



Ü9.5 (a) Zeigen Sie, dass die Gruppen $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$ isomorph sind und geben Sie einen Isomorphismus an.

Hinweis: Denken Sie an die Potenzgesetze.

(b) Finden Sie möglichst viele Gründe dafür, dass die Gruppen $(\mathbb{Z}_8, +)$ und $(D_4, \circ)$ nicht isomorph sind.

A9.6 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name und Matrikelnr.) bis 15.6.2018, 12:00 Uhr**
Wir definieren eine „Sprache“ S auf dem Alphabet $\mathcal{A} = \{M, U\}$ durch folgende Regeln:

(MU1) MU ist ein Wort.

(MU2) Ist Mx ein Wort, dann ist auch MxU ein Wort (x steht hier für eine beliebige, auch leere, Zeichenkette).

(MU3) Sind x und y Wörter aus S, dann ist auch xy ein Wort aus S.

(MU4) Es gilt $UUU = M$.

(MU5) Es gilt $MMM = MM$.

(a) Finden Sie alle „Wörter" der Sprache (jedes Wort müssen Sie nur in einer Schreibweise angeben, z.B. $MUUU$ **oder** MM) und begründen Sie, warum keine weiteren existieren.

(b) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel von $(S, \circ)$ (die Verknüpfung $\circ$ ist die Konkatenation/Verkettung) der Wörter auf.

(c) Ist $(S, \circ)$ eine Halbgruppe? Ist $(S, \circ)$ ein Monoid? Ist $(S, \circ)$ eine Gruppe?

(d) Finden Sie eine nichttriviale Unterhalbgruppe von $(S, \circ)$.

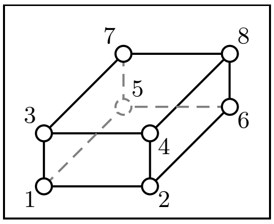
Ersetzen Sie Regel [MU5] durch die folgende Regel

(MU5') $MUMU = MU$.

und führen Sie für die so entstehende Sprache S' die selben Untersuchungen wie für M durch.

Hinweis: In dem Buch „Gödel, Escher, Bach" von Douglas A. Hofstadter finden Sie das MU-Rätsel, welches zu dieser Aufgabe inspirierte.

H9.7 Welche Bewegungen des Raums bilden einen Quader mit den Seitenlängen a, $2a$, $3a$ auf sich selbst ab? Beschreiben Sie sie durch Permutationen der Knotenmenge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Stellen Sie eine Gruppentafel auf. Bestimmen Sie zu jedem Element sein Inverses. Geben Sie eine Untergruppe der Ordnung 2 und eine Untergruppe der Ordnung 4 an.
Ist die Permutationsgruppe isomorph zu $(\mathbb{Z}_8, +)$?



H9.8 Beweisen Sie Lemma 2.18 aus der Vorlesung: Die Isomorphierelation $\cong$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Halbgruppen.

H9.9 Die *Quaternionengruppe* $\mathbf{Q_8} = (Q_8, \circ)$ besteht aus $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$; die Gruppenoperation $\circ$ ist durch die folgenden Gleichungen eindeutig festgelegt:

(1) $\forall q \in Q_8 : 1 \circ q = q \circ 1 = q$	(2) $\forall q \in Q_8 : -1 \circ q = q \circ -1 = -q$
(3) $i \circ i = j \circ j = k \circ k = -1$	(4) $i \circ j = j \circ -i = k$
(5) $j \circ k = k \circ -j = i$	(6) $k \circ i = i \circ -k = j$
(7) $\forall q \in Q_8 : -(-q) = q$	

(a) Bestimmen Sie $i \circ k$ und $j \circ i$; begründen Sie dabei Ihre Umformungsschritte durch die obigen Gleichungen.

(b) Stellen Sie die Gruppentafel auf.

(c) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Quaternionengruppe.