TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Dr. E. Lehtonen, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2018

10. Übungsblatt für die Übungen vom 18.6.-22.6.2018

Isomorphie von Gruppen, Untergruppen

Ein wesentliches Kriterium bei der Präsentation der folgenden Themen ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.

T10.1 **Themenaufgabe: Gruppentafel.**

Erinnern Sie an die „Sudoku-Regel“ zum Ausfüllen von Gruppentafeln. Lassen Sie die Teilnehmer die Verknüpfungstafeln

$$\begin{array}{c|cccc} \circ & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & & & \\ c & c & & a & \\ d & d & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \circ & x & y & z \\ \hline x & & & \\ y & & & \\ z & & & \end{array}$$

so vervollständigen, dass die Menge $\{a, b, c, d\}$ bzw. $\{x, y, z\}$ mit der Operation $\circ$ eine Gruppe bildet. Gehen Sie dazu vorher auf die Eigenschaften einer Gruppe ein. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Zu welchen bekannten Gruppen sind die Gruppen isomorph?

T10.2 **Themenaufgabe: Diedergruppen.**

Die Menge der Symmetrieabbildungen des Quadrates bildet die Diedergruppe $\mathbf{D_4} = (D_4, \circ)$ (siehe Aufgabe Ü9.4).
Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathbf{D_4}$ und begründen Sie, dass Sie alle Untergruppen gefunden haben. Verallgemeinern Sie das Ergebnis auf beliebige Diedergruppen $\mathbf{D_n}$.

Ü10.3 (a) Zeigen Sie: eine Gruppe mit Primzahlordnung besitzt genau 2 Untergruppen.

(b) Zeigen Sie Satz 2.31(b): Ist $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ eine *endliche* Gruppe, dann ist eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$ ist genau dann Trägermenge einer Untergruppe von G, wenn gilt:

$$\forall a, b \in U : ab \in U \qquad \text{(Abgeschlossenheit unter Verknüpfung)}$$

Ü10.4 (a) Beweisen Sie: Es gibt - bis auf Isomorphie - genau zwei Gruppen der Ordnung 4.

Hinweis: Stellen Sie alle möglichen Operationstafeln auf prüfen Sie deren Isomorphien.

(b) Beweisen Sie: Ist p eine Primzahl, dann gibt es - bis auf Isomorphie - genau eine Gruppe der Ordnung p.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass eine solche Gruppe zyklisch ist.

Ü10.5 Die *Einheitengruppe* $\mathbb{Z}_\mathbf{n}^* = (\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ besteht aus allen Einheiten der Menge $\mathbb{Z}_n$ zusammen mit der Multiplikation modulo n. Stellen Sie die Gruppentafel auf und bestimmen Sie alle Untergruppen für:

(a) $n = 10$, (b) $n = 12$, (c) $n = 24$.

Zu welcher der Gruppen aus Aufgabe Ü10.4 sind $\mathbb{Z}_\mathbf{10}^*$ bzw. $\mathbb{Z}_\mathbf{12}^*$ isomorph?

A10.6 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name und Matrikelnr.) bis 22.6.2018, 12:00 Uhr**
Gegeben sind 6 bijektive Abbildungen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ($i \in \{1, \ldots, 6\}$) durch

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = 1 - x,\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = \frac{1}{1-x},\ f_5(x) = \frac{x-1}{x},\ f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ mit der Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen als Operation eine Gruppe bildet. Stellen Sie die Verknüpfungstafel auf. Ist die Gruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathbf{S_3}$ oder zur Gruppe $(\mathbb{Z}_6, +)$? Geben Sie jeweils einen Isomorphismus an oder begründen Sie die Nichtisomorphie.

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen der Festigung und Vertiefung des Stoffes in der Nachbereitung der Lehrveranstaltung.

H10.7 In der speziellen Relativitätstheorie beschreibt das *relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten* die Addition $\oplus$ von Unterlichtgeschwindigkeiten $u, v \in (-c, c] =: C$ (dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit) durch

$$\oplus : C \times C \to C, \qquad u \oplus v := \frac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

Zeigen Sie, dass durch $\mathbf{C} := (C, \oplus)$ eine kommutatives Monoid gegeben ist, das außerdem ein Nullelement (d.h. ein Element x mit $a \oplus x = x$ für alle $a \in C$) enthält. Warum ist $\mathbf{C}$ keine Gruppe? Finden Sie eine nichttriviale Untergruppe von $\mathbf{C}$.

H10.8 Beweisen Sie Satz 2.27 aus der Vorlesung:

Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $a \in G$ und $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann gilt:

(a) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

(b) $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.

H10.9 Es sei $\mathbf{H} = (H, \cdot)$ eine nichtleere Halbgruppe. Zeigen Sie, dass $\mathbf{H}$ genau dann eine Gruppe ist, wenn es für alle $a, b \in H$ Elemente $x, y \in H$ gibt derart, dass

$$a \cdot x = b \quad \text{und} \quad y \cdot a = b.$$