

11. Übungsblatt für die Übungen vom 25.6.-29.6.2018

abelsche und zyklische Gruppen, direkte Produkte

Ein wesentliches Kriterium bei der Präsentation der folgenden Themen ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.

T11.1 Themenaufgabe: Isomorphie von Gruppen

Diskutieren Sie, welche der Gruppen

$$(D_6, \circ), \quad (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3, +), \quad (\mathbb{Z}_{12}, +), \quad (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +), \quad (\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \cdot)$$

isomorph sind. Nutzen Sie dazu z.B. die Eigenschaften: abelsch und zyklisch.

T11.2 Themenaufgabe: Isomorphie abelscher Gruppen

Es seien m, n natürliche Zahlen. Beweisen Sie, dass:

$$(1) \text{ ggT}(m, n) = 1 \implies \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn} \text{ und}$$

$$(2) \text{ ggT}(m, n) \neq 1 \implies \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \not\cong \mathbb{Z}_{mn}.$$

Stellen Sie den *Klassifikationssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen* vor.

Geben Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 100 an.

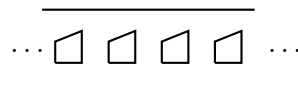
Ü11.3 Finden Sie, für $n \in \{1, 2, 3\}$ ebene Figuren (d.h. geeignete Teilmengen der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$), deren Symmetriegruppe isomorph zu $\mathbb{Z}_n$ ist.

Beweisen Sie: Ist die Symmetriegruppe $\mathbf{S}$ einer ebenen Figur (d.h. einer durch ein Polygon berandeten Teilmenge der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$) endlich, dann ist $\mathbf{S}$ isomorph zu $\mathbb{Z}_n$ oder zu $\mathbf{D}_n$ für geeignetes n .

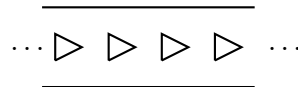
Hinweis: Erinnern Sie sich (aus der Lehrveranstaltung lineare Algebra) daran, dass $\mathbf{S}$ eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $\mathbf{O}(2)$ ist.

Ü11.4 Eine *Friesgruppe* ist die Symmetriegruppe einer ins Unendliche verlängerten bandartigen Struktur. Kennzeichen einer Friesgruppe ist, dass die Untergruppe der Translationen zyklisch ist. In dieser Aufgabe sollen einige Friesgruppen gefunden werden:

- (a) Bestimmen Sie alle Symmetrieabbildungen F_1 , des rechtsstehenden (ins unendlich verlängerten) Frieses. Zu welcher bekannten Gruppe ist die Menge der Symmetrieabbildungen F_1 zusammen mit der Hintereinanderausführung $\circ$ isomorph?



- (b) Zeigen Sie, dass die Symmetriegruppe des rechts stehenden Frieses isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ ist.



- (c) Beschreiben Sie die Symmetriegruppe des rechts stehenden Frieses. Ist sie isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$?



Ü11.5 Es sei $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Gilt $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ für alle $a, b \in G$, dann ist $\mathbf{G}$ abelsch.
- (b) Gilt $a^2 = 1$ für alle $a \in G$, dann ist $\mathbf{G}$ abelsch.
- (c) Zeigen Sie, dass Untergruppen zyklischer Gruppen ebenfalls zyklisch sind.

A11.6 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name und Matrikelnr.) bis 29.6.2018, 12:00 Uhr**
Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer auf. Die am weitesten rechts stehende Ziffer, die größer als 1 ist, sei die Zahl a . Die nächste (von rechts aus gesehen) Ziffer größer als 2 sei b .

- (a) Ist die Gruppe $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$ abelsch?
- (b) Ist die Gruppe $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$ zyklisch? Falls ja, geben Sie ein erzeugendes Element an, falls nein, dann ein Element maximaler Ordnung.
- (c) Finden Sie alle Untergruppen der Gruppe $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$.
Hinweis: Die letzte Teilaufgabe wird in Abhängigkeit von der Komplexität der Lösung bewertet.

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen der Festigung und Vertiefung des Stoffes in der Nachbereitung der Lehrveranstaltung.

H11.7 Zeigen Sie: Die symmetrische Gruppe $\mathbf{S}_n$ ist genau dann abelsch, wenn $n \leq 2$.

H11.8 Es gibt bis auf Isomorphie drei abelsche Gruppen mit 8 Elementen.

- (a) Geben Sie diese Gruppen mit ihren Elementen an.
- (b) Finden Sie, wenn möglich, in jeder dieser Gruppe ein Element der Ordnung 2, 4 und 8.

H11.9 Finden Sie einen Körper (d.h. eine geeignete Teilmenge des üblichen Euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$), dessen Symmetriegruppe isomorph zu $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ist.