Dr. E. Lehtonen, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2018

12. Übungsblatt für die Übungen vom 2.7.-6.7.2018

Homomorphismen, Normalteiler, Faktorgruppen

Ein wesentliches Kriterium bei der Präsentation der folgenden Themen ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.

T12.1 **Themenaufgabe: ein Normalteiler der Diedergruppe**

Bestimmen Sie die Links- und Rechtsnebenklassen der Untergruppe $\mathbf{\Delta} := (\{\mathrm{id}, d, d^2, d^3\}, \circ)$ der Gruppe $\mathbf{D_4}$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{\Delta}$ ein Normalteiler von $\mathbf{D_4}$ ist. Geben Sie die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbf{D_4}/\mathbf{\Delta}$ an. Zu welcher bekannten Gruppe ist $\mathbf{D_4}/\mathbf{\Delta}$ isomorph? Können Sie das Rechnen in der Faktorgruppe anschaulich erklären?

T12.2 **Themenaufgabe: Untergruppen vom Index 2 sind Normalteiler**

Beweisen Sie: Ist $\mathbf{U}$ Untergruppe einer Gruppe $\mathbf{G}$ mit $(G\!:\!U) = 2$, dann ist $\mathbf{U}$ Normalteiler von $\mathbf{G}$. Was besagt der Homomorphiesatz für die Faktorgruppe $\mathbf{G}/\mathbf{U}$?

Ü12.3 Überlegen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\varphi_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Homomorphismen oder Isomorphismen zwischen den Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ sind.

$$\varphi_1 : z \mapsto z + 1, \qquad \varphi_2 : z \mapsto 2z, \qquad \varphi_3 : z \mapsto -z.$$

Ü12.4 (a) Bestimmen Sie für die Diedergruppe $\mathbf{D_4}$ alle Normalteiler.

(b) Geben Sie zu jedem Normalteiler $\mathbf{N}$ von $\mathbf{D_4}$ die Elemente der Faktorgruppe $\mathbf{D_4}/\mathbf{N}$ und die zugehörige Verknüpfungstafel an. Geben Sie den natürlichen Homomorphismus $\pi_N : D_4 \to D_4/N$ konkret an.

Ü12.5 Es bezeichnen $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ die Gruppe aller reellen regulären $n \times n$-Matrizen mit der Matrizenmultiplikation und $SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge der Matrizen mit Determinante 1.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ eine Untergruppe von $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ ein Normalteiler von $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ ist, und geben Sie die Faktorgruppe $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ an.

(c) Bestimmen Sie die durch die Untergruppe $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ erzeugte Äquivalenzrelation. Finden Sie einen Homomorphismus von $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ nach $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$, dessen Kern $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ ist.

(d) Beweisen Sie die Isomorphie zwischen der Faktorgruppe $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ und der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

A12.6 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name und Matrikelnr.) bis 6.7.2018, 12:00 Uhr**

(a) Stellen Sie eine Gruppentafel für die Gruppe $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ der Einheiten von $\mathbb{Z}_{14}$ (mit der Multiplikation als Operation) auf.

(b) Geben Sie die Ordnungen aller Elemente von $\mathbb{Z}_{14}^*$ an. Ist die Gruppe zyklisch?

(c) Bestimmen Sie einen surjektiven Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}_{14}^* \to \mathbb{Z}_3$ von dieser Gruppe in die Gruppe $(\mathbb{Z}_3, +)$. Geben Sie dazu zu jedem Element $z \in \mathbb{Z}_{14}^*$ sein Bild unter φ an.

(d) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(\varphi)$ und erläutern Sie anhand von φ den ersten Isomorphiesatz.

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen zur Wiederholung und Klausurvorbereitung

W12.7 (a) Bestimmen Sie alle gemeinsamen Teiler der Zahlen 216 und 360.

(b) Zeichnen Sie ein Ordnungsdiagramm der Menge aller gemeinsamen Teiler von 216 und 360, geordnet nach Teilbarkeit.

(c) Wie viele Zahlen aus der Menge $\{0, 1, \ldots, 143\}$ sind zu 144 teilerfremd?

(d) Wie viele gerade natürliche Zahlen gibt es, die genau 7 Teiler haben?

W12.8 (a) Finden Sie ganze Zahlen α und β mit der Eigenschaft, dass die Summe

$$189 \cdot \alpha + 133 \cdot \beta$$

so nah wie möglich an 1000 liegt.

(b) Finden Sie ganze Zahlen δ und γ mit $189 \cdot \delta + 133 \cdot \gamma = 0$ und konstruieren Sie mit deren Hilfe eine zweite Lösung für den Aufgabenteil (a).

W12.9 (a) Beweisen Sie: Eine (im gewöhnlichen Dezimalsystem) fünfstellige Zahl der Form $abcad$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn

$$2c - b + d$$

durch 7 teilbar ist.

(b) Wie lautet die Teilbarkeitsbedingung für beliebige fünfstellige Zahlen, also Dezimalzahlen der Form $uvwxy$?