TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Dr. E. Lehtonen, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2018

13. Übungsblatt für die Übungen vom 9.7.-13.7.2018

Konjugation, Zentrum, Permutationsgruppen

Ein wesentliches Kriterium bei der Präsentation der folgenden Themen ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.

T13.1 **Themenaufgabe: Konjugation, Zentrum**

Erinnern Sie an den Begriff der *Konjugation*. Bestimmen Sie alle Konjugationsklassen in der Diedergruppe $\mathbf{D_4}$. Wie kann mit Hilfe dieser Klassen entschieden werden, ob eine Untergruppe $\mathbf{D_4}$ Normalteiler ist?

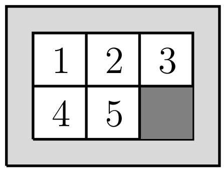
Erinnern Sie an den Begriff des *Zentrums* einer Gruppe. Geben Sie das Zentrum von $\mathbf{D_4}$ an.

T13.2 **Themenaufgabe: Automorphismen und innere Automorphismen**

Erläutern Sie die Begriffe *Automorphismus einer Gruppe* und *innerer Automorphismus einer Gruppe.*

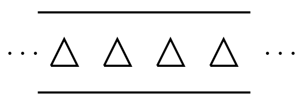
Bestimmen Sie alle inneren Automorphismen der Diedergruppe $\mathbf{D_4}$. Gibt es weitere Automorphismen in $\mathbf{D_4}$?

Ü13.3 Ein Schiebepuzzle besteht aus 15 Schiebeplättchen in einem 4×4-Raster, die von 1 bis 15 nummeriert sind und in die richtige Reihenfolge gebracht werden müssen. Das letzte Feld bleibt leer, um Plättchen verschieben zu können. Wir betrachten hier eine verkleinerte Version eines 2×3-Rasters, um die bekannte Tatsache zu begründen, dass keine zwei benachbarten Plättchen regelgerecht vertauscht werden können, ohne dass andere Plättchen ihren Platz verändern. Modellieren Sie die Situation mit Hilfe von Permutationen, insbesondere Transpositionen!



Ü13.4 Beweisen Sie: Ist $\sigma \in S_n$ eine Permutation und $\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_r = \sigma = \varrho_1 \circ \ldots \circ \varrho_s$ zwei Darstellungen von σ durch Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_r$ bzw. $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$, dann gilt $r \equiv s \pmod 2$.

Ü13.5 (a) Wir betrachten nochmals die Friesgruppe $\mathbf{S}$ aus Aufgabe Ü11.4(c). Verifizieren Sie, dass alle Symmetrieabbildungen Translationen und Spiegelungen sind und geben Sie sie jeweils als affine Abbildungen an.



(b) Beweisen Sie, dass $(\tau_a \circ \sigma_b)^2 = \mathrm{id}$ für jede Translation τ_a um $(a, 0)$ und jede Spiegelung σ_b entlang der Spiegelachse $(b/2, 0) + \mathbb{R}(0, 1)$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von $\mathbf{S}$.

(d) Welche Untergruppen von $\mathbf{S}$ sind Normalteiler?

(e) Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von $\mathbf{S}$. Zu welcher Gruppe ist $\mathbf{S}$ isomorph?

A13.6 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name und Matrikelnr.) bis 13.7.2018, 12:00 Uhr**
Die Permutationen $\sigma = (12)(45)$ und $\tau = (46)$ sind Elemente der symmetrischen Gruppe S_6.

(a) Berechnen Sie die Permutation $\sigma \circ \tau$.

(b) Geben Sie alle Elemente der von $\sigma \circ \tau$ erzeugten Untergruppe T von S_6 an.

(c) Welche Ordnungen können die Untergruppen von T besitzen? Geben Sie alle Untergruppen von T an.

(d) Ist T isomorph zu S_3 bzw. zu $\mathbb{Z}_6$? Begründen Sie!

(e) Wie viele Elemente besitzt die Permutationsgruppe $\langle\{\sigma, \tau\}\rangle$? Begründen Sie!

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen zur Wiederholung und Klausurvorbereitung

W13.7 (a) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n'$ sei die übliche Nachfolgerfunktion in $\mathbb{N}$. Beweisen Sie $m' + n = m + n'$.

(b) Es seien $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie, dass die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) :\iff ad = bc$$

transitiv ist.

(c) Es seien $a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie $\operatorname{ggT}(a, \operatorname{ggT}(b, c)) = \operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(a, b), c)$.

W13.8 Auf der Menge $M := \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{10}$ durch $x \circ y := (\alpha x + \beta y) \mod 10$ eine Operation definiert.

(a) Für welche Werte von α bzw. β ist $(M, \circ)$ eine Halbgruppe?

(b) Für welche Werte von α bzw. β ist $(M, \circ)$ ein Monoid?

(c) Für welche Werte von α bzw. β ist die Operation $\circ$ kommutativ?

(d) Beweisen Sie: Wenn $\alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod 5$ gilt, dann ist $(M, \circ)$ eine Gruppe. (Sie können dazu die Ergebnisse der vorigen Teilaufgaben nutzen). Geben Sie die Gruppentafel an. Zu welcher „bekannten" Gruppe ist $(M, \circ)$ dann jeweils isomorph?

W13.9 (a) Wie viele Einheiten gibt es im Ring $\mathbb{Z}_{\mathbf{30}}$?

(b) Welche Ordnung haben die Elemente $7, 11, 13$ in der Gruppe der Einheiten von $\mathbb{Z}_{\mathbf{30}}$?

(c) Ist die Gruppe der Einheiten von $\mathbb{Z}_{\mathbf{30}}$ zyklisch? Gibt es zu jedem Teiler der Gruppenordnung auch eine Untergruppe?

(d) Berechnen Sie $7^{(7^7)}$ in $\mathbb{Z}_{30}$. Nutzen Sie dafür das Lemma von Euler-Fermat.