



14. Übungsblatt für die Übungen vom 16.7.-20.7.2018

Ringe und Körper

Ein wesentliches Kriterium bei der Präsentation der folgenden Themen ist die Interaktion. Ziel ist es, die Probleme gemeinsam mit dem Auditorium zu erarbeiten und nicht frontal zu vermitteln. Setzen Sie dabei - falls die limitierte Zeit dazu ausreicht - Lerntechniken ein, die Sie im Studium kennengelernt haben. Die Vortragsdauer ist strikt auf 12 Minuten beschränkt.

T14.1 Themenaufgabe: Körper mit vier Elementen.

Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie nur einen Körper $\mathbf{K} = (K, 0, 1)$ mit vier Elementen gibt. Nennen Sie dazu wie üblich das Nullelement 0 und das Einselement 1 und setzen Sie $K = \{0, 1, a, b\}$. Lassen Sie die Operationstabellen für $(K, +)$ (Addition) und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ (Multiplikation) aufstellen, indem alle Eigenschaften eines Körpers genutzt werden.

T14.2 Themenaufgabe: Ring der 2×2 -Matrizen.

Diskutieren Sie, dass die Menge aller 2×2 -Matrizen mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen einen Ring bildet. Beweisen Sie gemeinsam, dass die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

einen Unterring von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ bildet. Welches sind die Einheiten von U ?

Ü14.3 Zeigen Sie die paarweise Nichtisomorphie der folgenden Ringe ($\mathbf{K}$ sei dabei der Körper aus der Themenaufgabe T14.1):

$$(\mathbb{Z}_2)^2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbf{K}, \quad \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}.$$

Finden Sie weitere, zu den genannten nichtisomorphe Ringe mit 4 Elementen.

Ü14.4 (a) Beweisen Sie: $\mathbb{Z}_p$ ist ein Körper genau dann, wenn p eine Primzahl ist.

(b) Geben Sie im Ring $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$ alle Nullteiler und alle Einheiten (mit ihren jeweiligen Inversen) an.

Ü14.5 Betrachtet wird die Potenzmenge $R := \mathfrak{P}(M)$ der dreielementigen Menge $M = \{a, b, c\}$. Zeigen Sie, dass R mit den Operationen

$$A + B := A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B), \quad A \cdot B := A \cap B \quad \text{für alle } A, B \in R$$

einen endlichen kommutativen Ring bildet. Geben Sie das Einselement an. Bestimmen Sie alle Einheiten und alle Nullteiler in diesem Ring.

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen zur Wiederholung und Klausurvorbereitung

W14.6 (a) Beweisen Sie: Jede zyklische Gruppe ist abelsch

(b) Beweisen Sie: Jede Gruppe von Primzahlordnung ist zyklisch.

- (c) Sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass $\mathbf{G}$ ein Normalteiler von $\mathbf{G}$ ist. Zu welcher bekannten Gruppe ist die Faktorgruppe $\mathbf{G}/\mathbf{G}$ isomorph?

W14.7 Wir betrachten in dieser Aufgabe die Gruppe $\mathbf{G} = (G, \cdot) := (S_3, \circ) \times (\mathbb{Z}_2, +)$. Dabei ist $(S_3, \circ)$ die symmetrische Gruppe über der Menge $\{0, 1, 2\}$.

- (a) Wie viele Elemente besitzt G ?
- (b) Welche Ordnungen können Untergruppen von $\mathbf{G}$ besitzen?
- (c) Bestimmen Sie alle Elemente der von dem Element $((0\ 1\ 2), 1) \in G$ erzeugten Untergruppe $\mathbf{U} \leq \mathbf{G}$. Ist $\mathbf{U}$ ein Normalteiler von $\mathbf{G}$?
- (d) Beweisen Sie, dass $\mathbf{U} \cong (\mathbb{Z}_6, +)$ gilt.
- (e) Gibt es eine Untergruppe von $\mathbf{G}$, die isomorph zu $(S_3, \circ)$ ist?

W14.8 Auf der Menge $M_i := \{0, 1, \dots, i-1\}$ ist durch $a \circ b = \min\{a, b\}$ eine Operation definiert.

- (a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel von $(M_4, \circ)$ auf.
- (b) Beweisen Sie, dass $(M_i, \circ)$ für alle $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein Monoid ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $\varphi : M_4 \rightarrow M_2$ mit $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = \varphi(3) = 1$ ein Homomorphismus ist.
Zeigen Sie, dass $\psi : M_4 \rightarrow M_2$ mit $\psi(0) = \psi(2) = 0$, $\psi(1) = \psi(3) = 1$ *kein* Homomorphismus ist.
- (d) Beweisen Sie, dass $\varphi : M_4 \rightarrow M_2$ genau dann ein Homomorphismus ist, wenn

$$\forall a, b \in M_4 : a \leq b \implies \varphi(a) \leq \varphi(b)$$

gilt. Wie viele surjektive Homomorphismen $\varphi : M_4 \rightarrow M_2$ gibt es?