TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Jun.-Prof. Martin Schneider, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2019

2. Übungsblatt für die Übungen vom 8.4.-12.4.2019

Algebraische Strukturen

Ü2.1 Zeigen Sie mittels des Induktionsaxioms von Peano und der in der Vorlesung gegebenen rekursiven Definitionen der Addition in $\mathbb{N}$, dass folgende Eigenschaften gelten:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \; 0 + n = n.$

(b) $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n + m)' = n' + m.$

(c) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m = m + n.$

Ü2.2 Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen R bzw. $\sim$ auf der jeweiligen Grundmenge A Äquivalenzrelationen sind. Charakterisieren Sie die Äquivalenzklassen.

(a) $A = \{1, 2, \dots, 6\}, \quad R = \{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (6, 1)\} \cup \Delta_A,$

(b) $A = \mathbb{R}, \quad x \sim y :\Longleftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + 2k\pi,$

(c) $A = \mathbb{R}, \quad x \sim y :\Longleftrightarrow\; |x - y| < \pi,$

(d) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), \quad (a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow\; ad = bc.$

Geben Sie zur Relation R die „Kreuztabelle“ und die zugehörige Zerlegung an.

Hinweis: Die Relation $\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$ bezeichnet die identische Relation auf A.

Ü2.3 Sei $\underline{R}$ ein endlicher kommutativer Ring mit Einselement. Zeigen Sie, dass jedes von Null verschiedene Element von R entweder Nullteiler oder Einheit ist. Folgern Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich bereits ein Körper ist.

Hinweis: In einem Ring $\underline{R} = (R, +, \cdot)$ heißt ein Element $a \in R \setminus \{0\}$ *Nullteiler*, wenn $\exists b \in R \setminus \{0\}$: $a \cdot b = 0$ und *Einheit*, wenn $\exists b \in R : a \cdot b = 1$.

Ü2.4 Es bezeichne $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven und $\mathbb{R}_0$ die Menge der von Null verschiedenen reellen Zahlen. Machen Sie sich klar, dass $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ und $(\mathbb{R}_0, \cdot)$ Gruppen sind.

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppen $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$ zueinander isomorph sind, d.h. dass eine bijektive Abbildung $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ mit der Eigenschaft $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ existiert.

*(b) Beweisen Sie, dass es aber keinen Isomorphismus zwischen $(\mathbb{R}_0, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$ gibt.

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen der Festigung und Vertiefung des Stoffes in der Nachbereitung der Lehrveranstaltung. Sie müssen nicht abgegeben werden.

H2.5 (a) Prüfen Sie, ob die folgende Menge mit den angegebenen zwei Operationen ein Ring oder sogar ein Körper ist:

$$(\mathbb{Z}, \oplus, \odot) \text{ mit } a \oplus b := a + b - 1, \quad a \odot b := a + b - ab.$$

(b) Betrachtet wird die Potenzmenge $R := \mathfrak{P}(M)$ der dreielementigen Menge $M = \{a, b, c\}$. Zeigen Sie, dass R mit den Operationen

$$A + B := A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B), \quad A \cdot B := A \cap B \qquad \text{für alle } A, B \in R$$

einen endlichen kommutativen Ring bildet. Geben Sie das Einselement an. Bestimmen Sie alle Einheiten und alle Nullteiler in diesem Ring.

H2.6 Die „Paradoxie des Haufens" geht von einem Haufen, z.B. von Sandkörnern aus. Sukzessive werden Sandkörner von dem Haufen entfernt. Die Entfernung eines Sandkornes ändert sicherlich nichts an der Tatsache, dass die restlichen Körnern einen Haufen bilden. Werden allerdings immer weitere Sandkörner entfernt, bleibt schließlich nur noch ein Sandkorn übrig, welches sicher nicht mehr als Haufen bezeichnet werden kann.

Wo würden Sie den Fehler in dieser Argumentation verorten? Sie können dabei Ihr Wissen über Äquivalenzrelationen anwenden.

H2.7 Analysieren Sie die beiden folgenden Behauptungen und ihre Beweise. Finden Sie den grundsätzlichen Fehler im Aufbau des ersten „Beweises". Warum ist der zweite Beweis im Gegensatz zum ersten tatsächlich beweiskräftig?

<u>1. Behauptung:</u> Es gilt $1 = 2$.

<u>Beweis:</u> Es sei

$$1 = 2.$$

Wir subtrahieren $3/2$ auf beiden Seiten und erhalten

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Nun quadrieren wir auf beiden Seiten:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Dies ist eine wahre Aussage, damit ist die Behauptung richtig.

<u>2. Behauptung:</u> Für jede natürliche Zahl a gilt: $4|a \implies 4|a^2$.

<u>Beweis:</u> Nach Voraussetzung existiert eine natürliche Zahl b mit $4 \cdot b = a$.

Nun quadrieren wir auf beiden Seiten: $(4b)^2 = a^2$.

Wir klammern links eine 4 aus, also $4 \cdot 4b^2 = a^2$.

Da $4b^2$ wieder eine natürliche Zahl ist, folgt die Behauptung $4|a^2$.