TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Jun.-Prof. Martin Schneider, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2019

3. Übungsblatt für die Übungen vom 15.4.-19.4.2019

Teilbarkeit, Euklidischer Algorithmus

N3.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**
Eine Relation $S \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$S := \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\}.$$

Zeigen Sie, dass S eine Äquivalenzrelation ist und charakterisieren Sie die Äquivalenzklassen in einem Koordinatensystem.

V3.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

(a) Begründen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Summe

$$s := n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4)$$

keine Primzahl ist. Finden Sie alle $n \in \mathbb{N}$, so dass s genau 3 Teiler hat.

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Beweisen Sie (vgl. Proposition 2.4,(3)(4)), dass für beliebige $a, b, c, d, s, t \in R$ folgende Implikationen gelten:

$$\text{(i) } a|b \wedge c|d \implies ac|bd, \qquad \text{(ii) } a|b \wedge a|c \implies a|(sb + tc).$$

Hinweis: Verwenden Sie Definition 2.1 als Basis Ihrer Beweise!

Ü3.3 Beweisen Sie Satz 2.3: Ist $\underline{R} = (R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins, dann ist $(\underline{R}^*, \cdot)$ eine abelsche Gruppe, die *Einheitengruppe* von $\underline{R}$.

Ü3.4 (a) Wir betrachten die Teilbarkeitsrelation $|$ auf der Menge $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$.

- Geben Sie die Relation als Menge konkreter Paare an.
- Verifizieren Sie, dass $|$ eine Ordnungsrelation auf A ist. Zeichnen Sie ein Ordnungs-Diagramm. Ist die Relation linear?
- Gibt es ein kleinstes bzw. größtes Element?

(b) Nun betrachten wir die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N}$ (vgl. Bemerkung 2.5). Versuchen Sie wieder, ein Diagramm zu zeichnen und beschreiben Sie dessen Aussehen. Gibt es kleinste und größte Elemente?

(c) Schließlich betrachten wir die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{Z}$. Wie ändert sich das Diagramm? Warum ist $|$ keine Ordnungsrelation?

Ü3.5 (a) Berechnen Sie zu den angegebenen Paaren (a, b) den größten gemeinsamen Teiler und stellen Sie diesen als ganzzahlige Linearkombination von a und b (d.h. als $\mathrm{ggT}(a, b) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) dar. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse!

(i) $a = 24, b = 135$, (ii) $a = 21, b = 34$ (iii) $a = 94, b = 127$, (iv) $a = 511, b = 1001$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(150, 105), 56) = \alpha \cdot 150 + \beta \cdot 105 + \gamma \cdot 56$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z})$.

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen der Festigung und Vertiefung des Stoffes in der Nachbereitung der Lehrveranstaltung. Sie müssen nicht abgegeben werden.

H3.6 Beweisen oder widerlegen Sie: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a|c \wedge b|c \iff ab|c$.

H3.7 Zeigen Sie: Gilt $n, m \in \mathbb{N}$ und ist m gerade, dann ist die Summe

$$s^* = \sum_{i=0}^{m}(n+i) = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+m)$$

durch $m+1$ teilbar.

H3.8 (a) Bert möchte gern 0,2 Liter Wasser aus dem Wasserhahn in ein mehr als 2 Liter messendes Gefäß abmessen. Er hat allerdings nur zwei Flaschen, die 1,25 Liter bzw. 0,7 Liter fassen (sowie einen Trichter, um ggf. Wasser aus dem Gefäß in eine der Flaschen zu gießen). Wie kann er das anstellen?

(b) Kann Bert die Aufgabe auch lösen, wenn er eine Flasche zu 1,25 Liter und ein zu 1 Liter hat?

Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe unter Zuhilfenahme des erweiterten Euklidischen Algorithmus.

H3.9 Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* (f_n) ist rekursiv definiert durch

$$f_1 = f_2 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n > 0.$$

(a) Berechnen Sie die Elemente der Folge bis f_{10}.

(b) Stellen Sie den ggT von f_9 und f_{10} sowie von f_{10} und f_{11} als Linearkombination von f_9 und f_{10} bzw. von f_{10} und f_{11} dar.

(c) Zeigen Sie (z.B. durch Induktion), dass zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen f_n und f_{n+1} teilerfremd sind und sogar die Beziehung $(-1)^n = f_{n-1} \cdot f_n - f_{n-2} \cdot f_{n+1}$ (für alle $n > 2$) für ihre Linearkombination gilt.

(d)* Zeigen Sie die *Identität von d'Ocagne*: $\forall m, n \in \mathbb{N}^+ : (-1)^n \cdot f_{m-n} = f_m \cdot f_{n+1} - f_n \cdot f_{m+1}$. Folgern Sie $\forall n, m \in \mathbb{N}^+ : \mathrm{ggT}(f_n, f_m) = f_{\mathrm{ggT}(n,m)}$.

H3.10 Beweisen Sie: Die in Satz 1.23 durch $x \leq y :\iff x \vee y = y$ definierte Relation $\leq \subseteq L \times L$ auf einem Verband $(L, \vee, \wedge)$ ist eine Ordnungsrelation.

Hinweis: Keine Angst, der Beweis ist leichter, als er aussieht!