TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Jun.-Prof. Martin Schneider, Dr. C. Zschalig

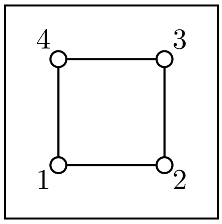
Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2019

7. Übungsblatt für die Übungen vom 13.5.-17.5.2019

Homomorphismen, Normalteiler, Faktorgruppen

N7.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Welche Bewegungen der Ebene bilden ein Quadrat auf sich selbst ab? Beschreiben Sie diese durch Permutationen der Knotenmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ des rechts gegebenen Quadrats. Mit der Hintereinanderausführung bilden die Permutationen eine Gruppe, die *Diedergruppe* $\underline{D_4}$. Stellen Sie eine Gruppentafel auf. Geben Sie zu jedem Element sein Inverses an und bestimmen Sie seine Ordnung. Finden Sie alle Untergruppen von $\underline{D_4}$ und begründen Sie, dass es keine weiteren gibt.



V7.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

(a) Überlegen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\varphi_i : G_i \to H_i$ Homomorphismen oder sogar Isomorphismen zwischen den Gruppen G_i und H_i sind.

(i) $G_1 = (\mathbb{Q}, +)$, $H_1 = (\mathbb{Q}, +)$, $\varphi_1 : q \mapsto 5q$

(ii) $G_2 = (\mathbb{Q}, +)$, $H_2 = (\mathbb{Q}, +)$, $\varphi_2 : q \mapsto q^2$

(iii) $G_3 = (\mathbb{Q}^\times, \cdot)$, $H_3 = (\mathbb{Q}, +)$, $\varphi_3 : q \mapsto q - 1$

(iv) $G_4 = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, $H_4 = (\mathbb{Q}^\times, \cdot)$, $\varphi_4 : (a, b) \mapsto 2^a 3^b$

(b) Zeigen Sie $(\mathbb{Z}_4, +) \ncong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

(c)* Zeigen Sie $(\mathbb{Z}, +) \ncong (\mathbb{Q}, +)$.

Ü7.3 (a) Bestimmen Sie für die Diedergruppe $\underline{D_4}$ (siehe Aufgabe 1) alle Normalteiler.

(b) Geben Sie zu jedem Normalteiler N von $\underline{D_4}$ die Elemente der Faktorgruppe $\underline{D_4}/N$ und die zugehörige Verknüpfungstafel an. Geben Sie den natürlichen Homomorphismus $\pi_N : D_4 \to D_4/N$ konkret an.

Ü7.4 Finden Sie möglichst viele Gründe dafür, dass die Gruppen $(\mathbb{Z}_8, +)$ und $(D_4, \circ)$ nicht isomorph sind.

Ü7.5 Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) In einer abelschen Gruppe sind alle Untergruppen Normalteiler.

(b) Ist $\underline{G}$ eine abelsche Gruppe mit Normalteiler N, dann ist auch $\underline{G}/N$ abelsch.

Ü7.6 Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $n \in \mathbb{N}$ und $a \in G$. Zeigen Sie:

(a) Ist G abelsch, so ist die Abbildung $f_n : G \to G$ mit $f_n(x) = x^n$ ein Homomorphismus.

(b) Die Abbildung $g_a : G \to G$ mit $g_a(x) = a^{-1}xa$ ist für jedes $a \in G$ ein Isomorphismus.

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen der Festigung und Vertiefung des Stoffes in der Nachbereitung der Lehrveranstaltung. Sie müssen nicht abgegeben werden.

H7.7 (a) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{Z}_6, +)$ und $(\underline{\mathbb{Z}}_7^*, \cdot)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen (der Ordnung 8) paarweise nicht isomorph sind:

(i) die Quaternionengruppe $\underline{Q_8}$ (vgl. Ü6.4),

(ii) die Diedergruppe $\underline{D_4}$ (vgl. Ü7.4)

(iii) die Gruppe $(\mathbb{Z}_2^3, +)$

(iv) die Gruppe $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)$,

(v) die Gruppe $(\mathbb{Z}_8, +)$

Hinweis: Das sind - bis auf Isomorphie - alle Gruppen der Ordnung 8.

(c) Zu welchen dieser Gruppen ist die Einheitengruppe $(\underline{\mathbb{Z}}_{24}^*, \cdot)$ isomorph? Warum?

H7.8 Es seien $\underline{G} = (G, +)$ und $\underline{H} = (H, \circ)$ Gruppen. Beweisen Sie:

(a) Ist $k \in \mathbb{Z}$ und $\underline{G}$ abelsch, dann ist $\varphi : \underline{G} \to \underline{G}$ mit $\varphi(g) = kg$ ein Gruppenhomomorphismus

Hinweis: Analog zu VL3.4, aber mit additiver Schreibweise, definieren wir $kg := \underbrace{g + g + \ldots + g}_{k\text{-mal}}$ für $k > 0$ und $kg := e_G$ für $k = 0$. Für $k < 0$ ist zusätzlich $kg := |k|(-g)$.

(b) Ist $\underline{G}$ abelsch und $\underline{G} \cong \underline{H}$, dann ist $\underline{H}$ abelsch.

H7.9 Es bezeichnen $\underline{GL_n}(\mathbb{R}) = (GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ die Gruppe aller reellen regulären $n \times n$-Matrizen mit der Matrizenmultiplikation und $SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge der Matrizen mit Determinante 1.

(a) Zeigen Sie, dass $SL_n(\mathbb{R})$ eine Untergruppe von $\underline{GL_n}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $SL_n(\mathbb{R})$ ein Normalteiler von $\underline{GL_n}(\mathbb{R})$ ist, und geben Sie die Faktorgruppe $\underline{GL_n}(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ an.

(c) Bestimmen Sie die durch die Untergruppe $SL_n(\mathbb{R})$ erzeugte Äquivalenzrelation. Finden Sie einen Homomorphismus von $\underline{GL_n}(\mathbb{R})$ nach $\underline{GL_n}(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$, dessen Kern $SL_n(\mathbb{R})$ ist.

(d) Beweisen Sie die Isomorphie zwischen der Faktorgruppe $\underline{GL_n}(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ und der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.