Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Jun.-Prof. Martin Schneider, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2019

8. Übungsblatt für die Übungen vom 20.5.-24.5.2019

Permutationsgruppen, Symmetriegruppen

N8.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Finden Sie, falls möglich, surjektive Homomorphismen von der Quaternionengruppe $\underline{Q_8}$ (vgl. Aufgabe Ü6.4) in die Gruppen $\underline{\mathbb{Z}_2}$, $\underline{\mathbb{Z}_3}$, $\underline{\mathbb{Z}_4}$ bzw. in die Kleinsche Vierergruppe (VL 3.8) $\underline{V}$.

V8.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Gegeben sind folgende Permutationen aus der Symmetriegruppe S_5 in Zweizeilenschreibweise:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie α, β, sowie $\alpha \circ \beta$, α^{-1}, β^{-1} und $(\beta \circ \alpha)^{-1}$ in Zyklenschreibweise an.

(b) Bestimmen Sie das Signum von α und von $\alpha \circ \beta$.

(c) Bestimmen Sie die Untergruppen $\langle \alpha \rangle$ und $\langle \beta \rangle$ von $(S_5, \circ)$.

Hinweis: Falls Sie mit der zweizeiligen Schreibweise und der Zyklenschreibweise für Permutationen nicht mehr vertraut sind, schauen Sie z.B. in Ihren LAAG-Vorlesungsnotizen oder in einem geeigneten Lehrwerk bzw. fragen Ihren Tutor.

Die Multiplikation von Permutationen erfolgt in dieser Lehrveranstaltung von rechts nach links (vgl. VL 3.32).

Ü8.3 Eine 5-eckige Doppelpyramide DP_5 besteht aus einem regelmäßigen 5-Eck als Grundfläche und jeweils einer Pyramide auf beiden Seiten der Grundfläche, so dass die Spitze jeweils senkrecht und mit gleichem Abstand über dem Mittelpunkt des 5-Ecks liegt. Eine Symmetrieabbildung von DP_5 ist eine Isometrie[1]des Raums („Kongruenzabbildung“), die die Figur DP_5 auf sich abbildet.

(a) Bestimmen Sie die Menge G des Symmetrieabbildungen von DP_5 und begründen Sie, dass sie zusammen mit der Hintereinanderausführung $\circ$ eine Gruppe bildet.

(b) Bestimmen Sie die Bahn $G.x$ jeder Ecke x von DP_5. Vollziehen Sie die Aussage von Lemma 3.33(a) nach.

(c) Bestimmen Sie den Stabilisator G_x jeder Ecke x von DP_5 und vollziehen Sie die Aussage von Lemma 3.33(b) nach.

(d) Zu welcher bekannten Gruppe ist $(G, \circ)$ isomorph?

(e) Erweitern Sie Ihr Ergebnis auf eine n-eckige Doppelpyramide, für beliebiges $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Vorsicht bei $n = 4$!

Ü8.4 Beweisen Sie die noch nicht gezeigten Teile von Lemma 3.33 aus der Vorlesung.

[1]Eine *Isometrie* (vgl. Modul LAAG) ist eine affine Abbildung aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ in sich, die Längen und Winkel erhält.

Ü8.5 Bestimmen Sie mit Hilfe des Bahn-Stabilisator-Theorems (VL 3.34) die Anzahl aller Symmetrieabbildungen eines Hexaeders (Würfels).

Ü8.6 Beweisen Sie: Besteht die Permutation $\sigma = (a_1, \ldots, a_n) \in S_m$ (mit $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $m \geq n$) aus einem Zyklus der Länge n, dann ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-1}$.

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen der Festigung und Vertiefung des Stoffes in der Nachbereitung der Lehrveranstaltung. Sie müssen nicht abgegeben werden.

H8.7 Bestimmen Sie mit Hilfe des Bahn-Stabilisator-Theorems (VL 3.34) und in Analogie zu Aufgabe Ü8.5 die Anzahl aller Symmetrieabbildungen aller *platonischen Körper*.

H8.8 Finden Sie einen Körper (d.h. eine geeignete Teilmenge des üblichen Euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$), dessen Symmetriegruppe isomorph zu $\underline{\mathbb{Z}_4} \times \underline{\mathbb{Z}_2}$ ist.

H8.9 (a) Bestimmen Sie alle geraden Permutationen auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$.

(b) Die Menge dieser Permutationen bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die *alternierende Gruppe* $\underline{A}_{[4]}$. Geben Sie die Gruppentafel an.

(c) Wie viele Elemente hat die alternierende Gruppe $\underline{A}_{[n]}$ über einer n-elementigen Menge? Begründen Sie!

Hinweis: Verwenden Sie für (a) die Aussagen aus Aufgabe Ü8.6 und die Homomorphie von sgn, vgl. VL 3.37).