TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Jun.-Prof. Martin Schneider, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2019

9. Übungsblatt für die Übungen vom 27.5.-31.5.2019

zyklische und abelsche Gruppen

N9.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**
Gegeben seien die Permutationen $x = (12345)$ und $y = (12)(35)$ aus der symmetrischen Gruppe $(S_5, \circ)$. Weiter sei $G = \langle x, y \rangle$.

(a) Zeigen Sie $x \circ y = y \circ x^4$.

(b) Beweisen Sie mit (a), dass $\forall n \in \{1, 2, 3, 4\} : x^n \circ y = y \circ x^{5-n}$. Schlussfolgern Sie, dass jedes Element der Form $y \circ x^n$ selbstinvers ist.

(c) Beweisen Sie mit (a) und (b), dass $|G| = 10$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $U = \langle x \rangle$ ein Normalteiler von $(G, \circ)$ ist und stellen Sie eine Gruppentafel der Faktorgruppe G/U auf.

(e) Zeigen Sie, dass $U = \{\mathrm{id}, y\}$ eine Untergruppe, aber kein Normalteiler von $(G, \circ)$ ist.

V9.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

(a) Welche Ordnungen haben die Elemente $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$ und $(3, 1)$ in der Gruppe $\underline{\mathbb{Z}_9} \times \underline{\mathbb{Z}_2}$?

(b) Finden Sie in der abelschen Gruppe $\underline{\mathbb{Z}_9} \times \underline{\mathbb{Z}_3}$, falls möglich, Elemente mit den Ordnungen 3, 6, 9 und 27.

(c) Zeigen Sie: Die symmetrische Gruppe $\underline{S_n}$ ist genau dann abelsch, wenn $n \leq 2$.

Ü9.3 Beweisen Sie: Ist G eine endliche zyklische Gruppe mit n Elementen, dann gibt es zu jedem Teiler m von n genau eine Untergruppe $U \leq G$ mit m Elementen.

Ü9.4 Es sei $\underline{G} = (G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Gilt $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ für alle $a, b \in G$, dann ist $\underline{G}$ abelsch.

(b) Gilt $a^2 = e$ für alle $a \in G$, dann ist $\underline{G}$ abelsch.

Ü9.5 (a) Wie viele erzeugende Elemente besitzt die Gruppe $\underline{\mathbb{Z}_{12}}$?

(b) Wie viele erzeugende Elemente besitzt die Gruppe $\underline{\mathbb{Z}_3} \times \underline{\mathbb{Z}_4}$? Geben Sie alle Erzeuger konkret an. Welche Ordnung hat das Element $(2, 2)$?

(c) Sind $\underline{\mathbb{Z}_{12}}$ und $\underline{\mathbb{Z}_3} \times \underline{\mathbb{Z}_4}$ isomorph?

(d) Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung $n = 100$. Finden Sie jeweils eine Untergruppe mit 4 und eine mit 50 Elementen.

(e) Betrachte den Ring $R = (\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$. Ist die Gruppe R^* zyklisch? Bestimmen Sie ggf. alle Erzeuger und deren Inverse.

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen der Festigung und Vertiefung des Stoffes in der Nachbereitung der Lehrveranstaltung. Sie müssen nicht abgegeben werden.

H9.6 Es gibt bis auf Isomorphie drei abelsche Gruppen mit 8 Elementen.

(a) Geben Sie diese Gruppen mit ihren Elementen an.

(b) Finden Sie, wenn möglich, in jeder dieser Gruppe ein Element der Ordnung 2, 4 und 8.

H9.7 Zeigen Sie, dass eine nicht-abelsche Gruppe $\underline{G} = (G, \cdot)$ mindestens 6 Elemente hat. Geben Sie weiterhin eine nicht-abelsche Gruppe mit 6 Elementen an.

Hinweis: Sind $a, b \in G$ mit $ab \neq ba$, so zeigen Sie, dass die Elemente e, a, b, ab, ba alle verschieden sind. Zeigen Sie, dass dann entweder a^2 keines dieser Elemente ist oder dass $a^2 = e$ gilt. Zeigen Sie, dass im letzteren Fall $aba \notin \{e, a, b, ab, ba\}$ folgt.

Alternativ kann man auch zeigen, dass alle Gruppen mit Ordnung kleiner 6 abelsch sind.

H9.8 Es sei $\underline{G} = (G, +)$ eine endliche, abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass dann

$$2 \cdot \sum_{g \in G} g = 0$$

gilt, wobei $2g := g + g$ für $g \in G$ definiert ist. Geben Sie ein Beispiel für eine endliche abelsche Gruppe $\underline{H} = (H, +)$ an mit $\sum_{h \in H} h \neq 0$.